

Introduzione ai sistemi complessi

Andrea Roli

Dipartimento di Scienze
Università degli Studi "G.D'Annunzio" Chieti-Pescara
a.roli@unich.it

Avvertenza

Il settore è vastissimo: coinvolge diverse discipline e vi sono applicazioni sono in numerosissimi campi.

In questo seminario saranno presentate – in modo intuitivo e qualitativo – solo alcune delle idee principali e qualche esempio significativo.

Sistemi Complessi

Area di ricerca multidisciplinare:

- ▶ Matematica
- ▶ Fisica
- ▶ Informatica
- ▶ Biologia
- ▶ Economia
- ▶ Filosofia
- ▶ ...

Sommario

Introduzione

Nel regno dei sistemi complessi
Concetti fondamentali

Casi rilevanti

Reti booleane
Swarm intelligence
Complex networks

Sistemi Complessi

Prospettiva per comprendere sistemi quali:

- ▶ il cervello
- ▶ le relazioni sociali e familiari
- ▶ il mercato azionario
- ▶ la società
- ▶ gli ecosistemi
- ▶ le strategie di coordinazione (stormi di uccelli, strategie di gioco a squadre, ecc.)
- ▶

Riduzionismo vs. Olismo

Approccio **riduzionistico** (che ha dominato la scienza fino a qualche decennio fa e ha prodotto notevoli risultati):

- ▶ scomporre il sistema in parti *elementari*
- ▶ studiare il comportamento di ciascun componente e quindi derivare il comportamento complessivo del sistema

Per esempio: il corpo umano è composto da sistemi di organi, ciascun sistema è composto da organi, ciascun organo è formato da tessuti, i quali sono formati da cellule, le quali sono formate da molecole, a loro volta formate da atomi. E gli atomi sono formati da particelle elementari.

Riduzionismo vs. Olistmo

Approccio **olistico** (più recente, complementare al riduzionismo):

- ▶ interpretare il comportamento del sistema come risultato delle relazioni tra le sue parti

Per esempio: il comportamento di uno stormo di uccelli non può essere spiegato dalla semplice descrizione del volo (posizione e velocità) del singolo elemento, ma è il *risultato* dell'interazione degli elementi del sistema.

Relazioni

- ▶ Lottica dei SC si focalizza sullo studio delle **relazioni** tra gli elementi del sistema e tra il sistema e l'ambiente.
- ▶ Osserviamo il sistema a diversi livelli di astrazione
- ▶ Consideriamo anche le inter-relazioni tra i livelli



Esempio

Come formuliamo il significato in una frase scritta?

- ▶ Leggiamo una o più parole (composte da lettere – *microlivello*)
- ▶ Ci formiamo una prima idea (anche vaga) del significato (*macrolivello*)
- ▶ Ritorniamo alle parole, che ora leggiamo con più facilità cercando di inquadrarle nel significato ipotizzato
- ▶ Il significato è precisato

Caratteristiche dei SC

Informalmente e grossolanamente, possiamo caratterizzare i sistemi complessi come sistemi dotati delle seguenti caratteristiche:

- Presenza di numerosi elementi
- Interazioni non-lineari
- Struttura a *rete*
- Retroazioni positive e negative
- Capacità di evolvere e adattarsi
- Robustezza
- Livelli di organizzazione

Complesso vs. Complicato

Complesso deriva dal latino (*cum + plexere*) e significa "intrecciato insieme"

Complicato deriva dal latino (*cum + plicare*) e significa "piegato, arrotolato insieme"

In altri termini: un sistema complicato può essere decomposto in sottoparti e compreso analizzando ciascuna di esse. Invece, un sistema complesso può essere compreso solo considerandolo "nel suo insieme" e osservando in particolare le interazioni tra i suoi elementi.

Concetti importanti

- ▶ **Adattativo (*adaptive*)**: un SC adattativo modifica il proprio comportamento in risposta all'ambiente.
- ▶ **Complessità**: la lunghezza minima di una descrizione completa del sistema.
- ▶ **Evoluzione**: processo di cambiamento e adattamento che avviene in popolazioni soggette a riproduzione e selezione di caratteristiche ereditabili.

Concetti importanti (cnt.)

- ▶ **Retroazione (feedback):** processo circolare di azione e influenza in cui l'effetto agisce sulla causa che lo ha provocato.
 - ▶ Feedback negativo: l'effetto tende a ridurre l'entità della causa
 - ▶ Feedback positivo: l'effetto aumenta l'entità della causa
- ▶ **Auto-organizzazione (self-organization):** la comparsa di "regolarità" o *pattern* non imposti direttamente dall'esterno. Un comportamento organizzato emerge dalle interazioni locali tra gli elementi del sistema.

Esempi

- ▶ Stormo di uccelli
- ▶ Formiche
- ▶ Automi cellulari

Sistemi complessi e intelligenza artificiale

- ▶ Un approccio per studiare i sistemi complessi è quello del formalismo dei sistemi dinamici. Lo stesso approccio è utilizzato in alcuni settori dell'IA (per esempio, le reti neurali)
- ▶ Sistemi complessi (naturali e non) si mostrano capaci di *risolvere problemi* → applicazioni in IA
- ▶ Congiunture sulla capacità di risolvere problemi e complessità del comportamento

Sistemi complessi e intelligenza artificiale

- ▶ Sistemi multiagente
 - ▶ Simulazione di sistemi distribuiti, autonomi e adattativi
 - ▶ Sistemi: *Swarm* (www.swarm.org), *JAS-Java Agent-based Simulator* (jaslibrary.sourceforge.net)

Sistema

INSIEME: collezione di entità. Per esempio, un insieme di parole.

INSIEME STRUTTURATO: collezione di entità aventi una struttura, relazioni, tra loro. Per esempio, un elenco di parole in ordine alfabetico.

SISTEMA: un insieme strutturato caratterizzato da proprietà specifiche che lo identificano e contraddistinguono come unità a sé. Per esempio, le parole di una frase con significato.

Astrazione e modelli

ASTRAZIONE: processo di aggregazione di informazioni e dati e di sintesi di modelli concettuali che ne enucleano le proprietà rilevanti, escludendo i dettagli inessenziali. (Es., una cartina geografica)

MODELLO: descrizione non ambigua e formale di un sistema. Il modello è frutto di un'astrazione, poiché si concentra sugli elementi essenziali per il contesto in cui il sistema è osservato.

Sistema aperto/chiuso

Di un sistema si possono, in genere, definire anche i confini. E', cioè, possibile dire cosa fa parte del sistema e cosa sia *esterno*.

- ▶ **Sistema chiuso**: sistema isolato rispetto all'esterno
- ▶ **Sistema aperto**: sistema che interagisce con l'esterno

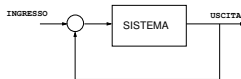
Osservazione: la caratteristica di chiusura/apertura di un sistema dipende dal livello di descrizione e dal modello utilizzati.

Proprietà

- ▶ Sistema chiuso: raggiunge uno stato finale di equilibrio, determinato dalle condizioni iniziali
- ▶ Sistema aperto: può non raggiungere mai uno stato di equilibrio, ma stati *stazionari* lontani dall'equilibrio

Retroazione (feedback)

Informalmente, diciamo che un sistema è in *retroazione* se la sua uscita ha influenza sull'ingresso.



Retroazione positiva

L'uscita è combinata con l'ingresso in modo tale da rinforzare l'ingresso complessivo del sistema.

- ▶ In natura: feedback positivo usato per rinforzare meccanismi che aiutano la sopravvivenza (p.es., caratteristiche genetiche vantaggiose)

Retroazione positiva

Esempio

Un prodotto commerciale è venduto ogni giorno in quantità proporzionale al numero di persone che già hanno acquistato il prodotto in precedenza (più acquirenti ci sono stati, più ce ne saranno. Caso reale relativo allo standard per videoregistratori)

Retroazione negativa

L'uscita è combinata con l'ingresso in modo tale da smorzare l'ingresso complessivo del sistema.

- ▶ In natura: feedback negativo usato come meccanismo di controllo della crescita (p.es., la lunghezza degli arti)

Esempio: una coda di persone cresce tanto più lentamente quanto più è lunga.

Compresenza di feedback positivo e negativo



- ▶ Caratteristico di sistemi adattativi
- ▶ Fase iniziale di avvio con feedback positivo
- ▶ Fase finale in saturazione con feedback negativo

Linearità

Un sistema è caratterizzato da una dinamica *lineare* quando l'uscita è proporzionale all'ingresso.

Proprietà della linearità:

- ▶ Se l'ingresso raddoppia, raddoppia anche l'uscita (ovviamente lo stesso vale moltiplicando per una qualunque costante non nulla)
- ▶ L'uscita risultante di una somma di ingressi è la somma delle uscite corrispondenti ai singoli ingressi (cioè, possiamo separare l'effetto di singoli ingressi)

Nonlinearità

- ▶ A meno di (forti) semplificazioni, nessun sistema è lineare.
- ▶ E' talvolta possibile *linearizzare* un sistema, in particolari condizioni e sotto opportune ipotesi (tipico nei settori ingegneristici del controllo e dei circuiti elettronici analogici)

Comunemente, osserviamo sistemi **nonlineari**, nei quali non vale la relazione di proporzionalità, né di scomposizione degli ingressi.

Esempi: ecosistema, mercato economico, fenomeni sociali (es., le mode). Tipicamente i sistemi nonlineari sono caratterizzati dalla presenza di retroazioni (positive e/o negative)

Nonlinearità (cnt.)

Non si deve temere la nonlinearità....

- ▶ La combinazione di feedback positivo e negativo è una forma naturale di incentivo e smorzamento
- ▶ I sistemi nonlineari sono in grado di realizzare compiti veramente complessi
- ▶ Non è possibile governare una società senza tenere conto delle nonlinearità nell'ambiente e nella società
- ▶ A volte è possibile agire in maniera mirata su un sistema per modificarne completamente la dinamica
- ▶ (l'altra faccia della medaglia) A volte si pensa che una piccola modifica non abbia effetti rilevanti

Modelli

Possiamo rappresentare il modello di un sistema tramite:

- ▶ Equazioni differenziali
- ▶ Equazioni alle differenze
- ▶ Descrizione di regole elementari e simulazione al calcolatore
- ▶ ...

Equazioni differenziali

Forniscono informazioni su come una grandezza (p.es., l'uscita) cambi nel tempo in funzione di un'altra grandezza (p.es., l'ingresso) o della stessa grandezza.

Esempio:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -7e^{2x} + 5$$

Equazioni alle differenze

Forniscono informazioni sul valore futuro, al successivo istante di tempo, di una grandezza in funzione di un'altra grandezza o della stessa.

Esempi:

- ▶ $y(t+1) = a \exp(-x(t))$
- ▶ $x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$

Un esempio curioso

Consideriamo il sistema composta da Giulietta e Romeo. Contrariamente alla storia, immaginiamo questa situazione:

- Romeo ama Giulietta tanto più quanto ella lo respinge, e viceversa
- Giulietta ama Romeo quanto più egli la contraccambia

Liberalmente tratto (e semplificato) da: S.Strogatz, "Love and differential equations: An introduction to modeling", Mathematics Magazine, Vol. 61, No. 1, Feb. 1988.

Un esempio (cnt.)

Un modello estremamente semplificato (molto rozzo):

- ▶ $r(t)$: 'amore' di Romeo per Giulietta
- ▶ $g(t)$: 'amore' di Giulietta per Romeo
- ▶ valori positivi indicano amore, valori negativi indicano repulsione

$r(t+1) = -ag(t)$, $a \geq 0$, se ieri Giulietta respingeva fortemente Romeo, oggi egli l'amerà con ardore comparabilmente intenso (e viceversa)

$g(t+1) = br(t)$, $b \geq 0$, se ieri Romeo amava con ardore Giulietta, oggi ella lo ricambierà con altrettanto ardore (e viceversa)

Un esempio (cnt.)

Cosa accade della loro dinamica amorosa? **Dipende dal valore dei parametri a e b ...**

- ▶ Se almeno uno dei due parametri vale zero (cioè, vi è indifferenza), il giorno seguente vi è totale indifferenza reciproca qualunque sia il livello di infatuazione iniziale.
- ▶ Altrimenti... facciamo qualche calcolo

Un esempio (cnt.)

Supponiamo, per semplicità, che al tempo $t = 0$ entrambi abbiano avuto un reciproco interesse 'unitario':
 $r(0) = g(0) = 1$.

- $t = 1$: $r(1) = -a$, $g(1) = b$
- $t = 2$: $r(2) = -ab$, $g(2) = -ab$
- $t = 3$: $r(3) = a^2b$, $g(3) = -ab^2$
- $t = 4$: $r(4) = a^2b^2$, $g(4) = a^2b^2$
- $t = 5$: $r(5) = -a^3b^2$, $g(5) = a^2b^3$
- ...

Un esempio (cnt.)

Risultato: è un continuo rincorrersi. Per metà del tempo, uno ama e l'altro respinge; per un quarto si respingono entrambi e per un quarto l'amore è reciproco. Che vita!

IMPORTANZA DEI PARAMETRI: lo stato finale cambia a seconda dei valori assunti da a e b .

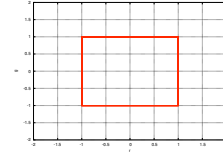
Un esempio (cnt.)

Tre casi:

1. $a = b = 1$: ciclo infinito tra gli stessi 4 punti
2. $ab > 1$: 'spirale' infinita con intensità di sentimenti sempre crescenti (quale possibile modifica al modello per renderlo più realistico?)
3. $ab < 1$: 'spirale' (formalmente) infinita, ma con intensità di sentimenti sempre più fievoli fino ad azzerarsi (quindi, dopo un po' di tempo, nella realtà i due saranno completamente indifferenti l'un l'altro)

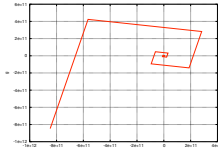
Un esempio (cnt.)

Caso 1: $a = b = 1$, ciclo infinito



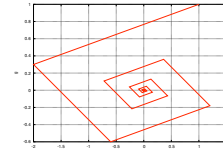
Un esempio (cnt.)

Caso 2: $ab > 1$, 'spirale' infinita che esplose



Un esempio (cnt.)

Caso 3: $ab < 1$, 'spirale' che converge nell'origine



Dinamica

La dinamica di un sistema può, molto spesso, essere suddivisa in due fasi:

- **Transitorio**: fase iniziale
- **Attrattore**: condizione stazionaria, 'a regime'

Attrattori

- ▶ Punto fisso (es., lo stato finale raggiunto da un pendolo semplice *in presenza* di attrito)
- ▶ Ciclo (es., lo stato finale raggiunto da un pendolo semplice *senza attrito*)
- ▶ Attrattore strano (caratteristico dei sistemi caotici)

Caos deterministico

- ▶ Regolato da leggi **deterministiche**
- ▶ Sensibilità rispetto alle condizioni iniziali (*effetto farfalla*)
- ▶ *Pratica* imprevedibilità a lungo termine
- ▶ Stato stazionario: *attrattore strano*

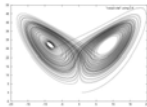
Caos deterministico

Per esempio:

- ▶ Equazioni meteorologiche (attrattore strano di Lorenz)
- ▶ Alcuni circuiti elettronici
- ▶ Semplici equazioni alle differenze. Mappa logistica:
 $x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$

Attrattore strano

Il più famoso attrattore strano deriva da un sistema di equazioni per le previsioni meteorologiche: l'attrattore di Lorenz.

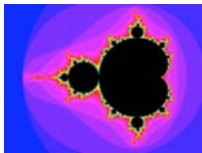


Attrattore strano

Oggetto geometrico appartenente alla classe dei *frattali*.

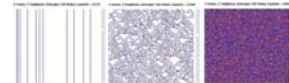
- ▶ Dimensione frazionaria
- ▶ Autosomiglianza
- ▶ Definiti da Benoit Mandelbrot (B.Mandelbrot. *Gli oggetti frattali*. Einaudi, 1987).

L'insieme di Mandelbrot



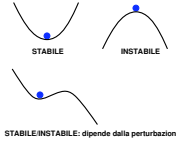
Complessità: al confine tra ordine e caos

- ▶ La complessità è situata al confine tra ordine e caos
- ▶ In tale zona vi sono informazione massima e massima capacità computazionale



Stabilità

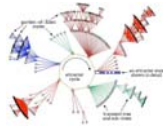
- ▶ Uno stato stazionario è **stabile** rispetto a una data perturbazione se il sistema, dopo un transitorio, ritorna nello stato di partenza



Simulazione

- ▶ Una **simulazione** è un modello (o una teoria) formulato come programma
- ▶ Eseguito sul computer, il modello produce risultati che sono predizioni empiriche.
- ▶ Se i risultati della simulazione corrispondono ai fatti osservati nella realtà, allora la teoria è confermata (o, quantomeno, non confutata).
- ▶ Altrimenti, il modello deve essere modificato o abbandonato.

Reti booleane

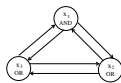


Reti booleane

- ▶ Introdotta da Stuart Kauffman come modello di reti genetiche
- ▶ Modello minimale di un sistema complesso
- ▶ Sistema dinamico tempo-discreto
- ▶ Comportamenti qualitativamente diversi a seconda dei valori di alcuni parametri

Reti booleane

- ▶ Grafo orientato di N nodi
- ▶ Nodo \rightarrow funzione booleana
- ▶ Stato di un nodo: valore della funzione booleana
- ▶ Ingressi di un nodo: stati dei nodi con archi entranti nel nodo



Dinamica

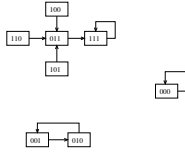
- ▶ Sincrona e deterministica
- ▶ Possibili varianti in altre applicazioni (p.es., dinamica asincrona)

t			t + 1		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1



Dinamica

- Possibili attrattori: punti fissi e cicli



Reti booleane casuali

- Topologia casuale (i.e., distr. uniforme degli archi)
- K ingressi per nodo
- Funzioni booleane casuali (i.e., distr. uniforme dei valori 0/1)

Reti booleane casuali

- $K \geq 3$: CAOS
 - Cicli di periodo molto lungo ($\sim 2^N$, per $N \gg 1$ praticamente periodo infinito)
 - Sensibilità alle condizioni iniziali
 - Instabilità

Reti booleane casuali

- $K = 2$: AUTO-ORGANIZZAZIONE
 - Cicli di periodo breve ($\sim \sqrt{N}$)
 - Stabilità
 - Transizione di fase

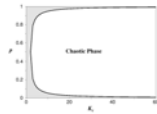
Reti booleane casuali

- $K = 1$: ORDINE TOTALE
 - Struttura modulare (anelli con frange)
 - Comportamento del sistema dato dal prodotto dei sottosistemi

Parametri critici

- K è rilevante perché influisce sulla percentuale di *funzioni canalizzanti* (p.es., OR)
- $K = 2 \rightarrow$ maggioranza di funzioni canalizzanti
- Altro parametro: p = frazione di valori con 0

Parametri critici



Applicazioni

- ▶ Modello dell'attività dei geni (p.es., differenziazione e attività cellulare)
- ▶ Sistemi di apprendimento automatico
- ▶ Soluzione del problema di soddisfacibilità

Swarm Intelligence



Swarm Intelligence

Intelligenza collettiva emergente in gruppi di agenti (semplici).

Prende origine da metafore e modelli del comportamento di insetti sociali.

- ▶ Formiche e ricerca di cibo, ripartizione del lavoro, riordinamento di larve.
- ▶ Termiti e costruzione di nidi
- ▶ Api e costruzione e disposizione di aree specifiche nell'alveare.

Swarm Intelligence

Proprietà delle metafore di sistemi di insetti sociali:

- ▶ Elaborazione distribuita
- ▶ Interazioni dirette e indirette
- ▶ Agenti con semplici capacità computazionali
- ▶ Flessibilità
- ▶ Robustezza

Swarm Intelligence

Problemi risolti con successo dagli insetti sociali:

- ▶ Ricerca di cibo
- ▶ Ripartizione del lavoro
- ▶ Raggruppamento di oggetti
- ▶ Ordinamento di larve
- ▶ Costruzione di nidi
- ▶ Trasporto cooperativo

Auto-organizzazione

Il principio fondamentale del successo di sistemi a intelligenza collettiva è l'auto-organizzazione:

insieme di meccanismi dinamici nei quali compaiono strutture a livello globale, in seguito alle interazioni tra le componenti di livello inferiore.

Caratteristiche:

- ▶ Creazione di strutture spazio-temporali
- ▶ Multistabilità (esistenza di più stati stabili)
- ▶ Esistenza di biforcazioni a fronte di variazioni di parametri critici.

Auto-organizzazione

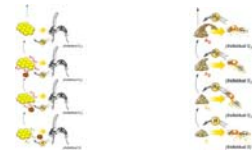
Ingredienti:

- ▶ **Interazioni multiple tra agenti**
 - Agenti semplici (per esempio basati su regole)
 - Sistemi composti da numerosi agenti
- ▶ **Feedback positivo (amplificazione)**
 - Amplificazione di fluttuazioni casuali e formazione di strutture
 - Rinforzo dei *pattern* di comportamento più "diffusi"
- ▶ **Feedback negativo (regolazione)**
 - Saturazione
 - Competizione
 - Esaurimento di risorse

Stigmergia

- ▶ Particolare forma di **comunicazione indiretta** usata dagli insetti sociali per coordinarsi
- ▶ Due individui interagiscono indirettamente quando uno di essi modifica l'ambiente e l'altro reagisce al nuovo ambiente in un momento successivo

Stigmergia



Ant Algorithms

- ▶ Algoritmi ispirati al comportamento collettivo delle formiche durante la ricerca di cibo
- ▶ Applicati inizialmente a problemi di ottimizzazione combinatoria (Dorigo 1992), poi a problemi di routing e classificazione di informazioni
- ▶ Notevoli risultati in robotica

Ant Algorithms

Meccanismi fondamentali:

1. Ogni formica deposita sul terreno una sostanza chimica (*feromone*) mentre cammina.
2. La scelta del percorso da seguire alla ricerca di cibo è guidata dall'intensità del feromone: più è intenso in una direzione, maggiore sarà la probabilità di scegliere tale direzione.
3. Il feromone evapora nel tempo, quindi rimangono "marcati" solo i percorsi usati più frequentemente.

Ant Algorithms



Applicazioni

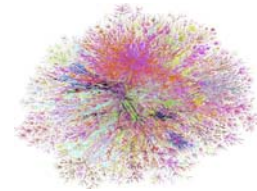
- ▶ Ant Colony Optimization
- ▶ AntNet
- ▶ Swarm-bots
 - ▶ Raccolta e raggruppamento di oggetti
 - ▶ Spostamento di oggetti di grandi dimensioni (trasporto cooperativo)
- ▶ Autoassemblaggio

Swarm-bots

- ▶ Clustering
- ▶ Trasporto cooperativo

Complex networks

Grafi come modello delle inter-relazioni



Complex networks

Grafi come modello delle inter-relazioni

- ▶ La struttura tra le entità del sistema è fondamentale
- ▶ Il comportamento del sistema dipende dalla struttura di relazioni tra gli elementi
- ▶ La teoria dei grafi offre modelli efficaci
- ▶ Recente filone di ricerca su 'grafi complessi'

Grafo come struttura di un sistema

Idea chiave:

- ▶ Rappresentare le entità come nodi di un grafo
- ▶ e le relazioni come archi del grafo
- ▶ Un nodo può costituire un'unità funzionale o anche un intero sotto-sistema

Caratteristiche importanti

- ▶ Grado dei nodi (i.e., distribuzione del numero di archi incidenti)
- ▶ Diametro, lunghezza caratteristica e grandezze correlate
- ▶ Fattore di clustering (i.e., tendenza a formare sottografi completamente connessi)

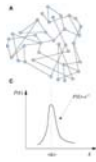
25

Grafi random

- ▶ Primo modello per la topologia di un sistema complesso
- ▶ Efficace in diversi ambiti (p.es., in biologia con le reti di Kauffman)
- ▶ Non rappresentativo di sistemi sociali e biologici
- ▶ Distribuzione del grado: Gaussiana (come caso limite della distrib. di Poisson)
- ▶ Lunghezza caratteristica bassa
- ▶ Clustering basso

26

Grafi random



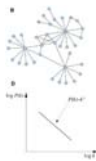
27

Reti scale-free

- ▶ Relazioni sociali (p.es., collaborazioni scientifiche, cinematografiche, ecc.)
- ▶ Struttura tra pagine web
- ▶ Struttura fisica di Internet
- ▶ ...
- ▶ Distribuzione del grado: numero nodi con grado $k \sim k^{-\gamma}$ (γ parametro)
- ▶ Presenza di pochi *hub* e molti nodi con poche connessioni
- ▶ Robuste rispetto a guasti casuali
- ▶ Sensibili ad attacchi mirati

28

Reti scale-free



29

Reti scale-free

- ▶ Dinamica profondamente diversa rispetto a topologie casuali o completamente connesse
- ▶ Implicazioni in medicina (epidemie e vaccinazioni), applicazioni web e Internet
- ▶ Fenomeni *small-world* (bassa lunghezza caratteristica, alto clustering)

30

Genesi delle reti scale-free

Una rete che cresce nel tempo diventa scale-free in presenza di due condizioni:

- ▶ **Growth**: nodi più vecchi hanno in media un numero maggiore di connessioni
- ▶ **Preferential attachment**: i nodi nuovi preferiscono collegarsi a nodi preesistenti che abbiano un alto numero di connessioni (probabilità proporzionale al numero di link)
- ▶ Esistono varianti al modello che tengono conto anche dell'importanza (*fitness*) di un nodo

Bibliografia

Testi divulgativi

- ▶ **A. Gandolfi**. *Formica, imperi, cervelli. Introduzione alla scienza della complessità*. Bollati Boringhieri, 1999.
- ▶ **M. M. Waldrop**. *Complessità. Uomini e idee al confine tra ordine e caos*. Instar Libri, 1995.

Bibliografia

Testi introduttivi

- ▶ **Y. Bar-Yam**. *Dynamics of Complex Systems*. Studies in nonlinearity. Addison-Wesley, 1997. Disponibile gratuitamente in versione elettronica: www.necsi.org/publications/dcs/index.html.
- ▶ **A.-L. Barabasi**. *Linked: The New Science of Networks*. Perseus Books Group, 2002.

Bibliografia

Testi introduttivi (cont.)

- ▶ **E. Bonabeau, M. Dorigo, and T. Theraulaz**. *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, 1999.
- ▶ **R. Serra, G. Zanarini**. *Sistemi complessi e processi cognitivi*. Calderini