Rappresentazione dell'informazione in un calcolatore:

Informazioni

- testi, numeri interi e reali, immagini, , suoni, etc.;

Come viene rappresentata l'informazione in un calcolatore ?

- uso di tecnologia **digitale**: all'interno della CPU le informazioni vengono rappresentate da 2 possibili valori di tensione elettrica {V_{high}, V_{low}}

- In generale, a seconda del tipo di dispositivo considerato, i valori zero ed uno sono rappresentati:
  - da una tensione elettrica (alta, bassa);
  - da un differente stato di polarizzazione magnetica (positiva, negativa);
  - da luce e buio;
  - etc.

- Unita' di informazione nel calcolatore: **bit**.

☞ Ogni informazione viene trasformata nel calcolatore in una sequenza di bit (forma **BINARIA**), cioe' in una sequenza di 0 e 1.

00011010..

Codifica dei numeri

Il sistema di numerazione che utilizziamo si dice **arabico** e fu introdotto in Europa dagli arabi nel Medio Evo.

- **E` decimale** (o in base 10): esso rappresenta i numeri tramite sequenze di cifre che vanno da 0 a 9 (dieci cifre).

- **E` posizionale:** il peso attribuito ad ogni cifra e' funzione della posizione che occupa.

  (Esistono anche sistemi **additivi**, in cui ogni unita' e' rappresentata da un unico simbolo o non-posizionali come quello romano).

☞ I sistemi posizionali consentono di rappresentare numeri grandi con un numero limitato di cifre, e di svolgere su di essi calcoli piu' efficienti.

I sistemi di numerazione posizionale sono caratterizzati da una base b e un alfabeto α:

- **Alfabeto** (α): e' l'insieme delle cifre disponibili per esprimere i numeri. Ad ogni cifra corrisponde un valore compreso tra 0 e (b-1).
  (Ad esempio, nella numerazione decimale l'alfabeto e` α={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9})

- **Base** (b): e` il numero degli elementi che compongono l'alfabeto. Ad esempio, nel caso decimale, b=10.

Numerazione in base p

α={0,1,2,...p-1} ,
b=p
un numero generico N in base p e' rappresentato da una sequenza di cifre:

$$\mathbf{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$$

dove $\mathbf{a_i} \in \alpha$, $\forall$i=0,..n.

($\mathbf{a_n}$ e' la cifra piu' significativa, mentre $\mathbf{a_0}$ e' la meno significativa)

Codifica dei Numeri Naturali

Consideriamo l'insieme dei numeri naturali.

- Dato un sistema di numerazione posizionale <α, b>:

  α={0,1,2,...p-1} ,
  b=p

- Sia $\mathbf{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ la codifica di un numero naturale N in base p; allora il valore di N, in base decimale e` dato dalla formula:

$$N_p = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0$$

o, in forma piu` compatta:

$$N_p = \Sigma_{i=0,..n} \; a_i \cdot p^i$$

☞ Con **n** cifre in base **p** e' possibile rappresentare $\mathbf{p^n}$ numeri naturali diversi da 0 a p^{n-1} (i due limiti si ottengono sostituendo a tutti gli n coefficienti ai 0 o p-1 rispettivamente).

Infatti, il numero massimo si ottiene utilizzando la cifra massima (p-1) per ogni posizione:

$$(p-1).p^{n-1} + (p-1).\ p^{n-2} + \ldots (p-1)\ .p^1 + (p-1) =$$
$$p^n - p^{n-1} + p^{n-1} - p^{n-2} + p^{n-2} - \ldots - p + p - 1 =$$
$$= p^n - 1$$

ESEMPI

- **Conversione di un numero da base b a base decimale:**

Esempio 1: Codifica decimale. **b=10, N_{10}=5870**

$$5870 = 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

Esempio 2: Codifica **binaria**. **b=2,** α={0,1}

N_2=101001011

$101001011_2=(1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3+0 \cdot 2^2+1 \cdot 2^1+1.2^0)_{10}= (331)_{10}$

Esempio3: Codifica ottale. **b=8,** α={0,1,2,3,4,5,6,7}

N_8=(534)$_8$

$(534)_8= (5 \cdot 8^2+3 \cdot 8^1+4)_{10}= (348)_{10}$

Esempio3: Codifica esadecimale:

b=16

α={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

N_{16}=B7F

$B7F_{16}= (11 \cdot 16^2+7 \cdot 16^1+15)_{10}= (2943)_{10}$

Conversione di un numero naturale in base 10, in base non decimale

La formula

$$N_p = \mathbf{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0}$$

si puo' riscrivere come:

$$N_p = a_0 + p \cdot (a_1 + p \cdot (\ldots + p \cdot (a_{n-1} + a_n \cdot p)) \ldots)$$

- Eseguendo la **divisione intera** per p:

  $Np \text{ div } p = (a_1 + p \cdot (\ldots p \cdot (a_{n-1} + a_n \cdot p)) \ldots) = Q_1$

  $Np \text{ mod } p = \mathbf{a_0}$ [resto della divisione intera]

- Applichiamo la **divisione intera** per p sul risultato Q_1 della divisione precedente:

  $Q_1 \text{ div } p = (a_2 + p \cdot (\ldots p \cdot (a_{n-1} + a_n \cdot p)) \ldots) = Q_2$

  $Q_1 \text{ mod } p = \mathbf{a_1}$ [resto della divisione intera]

- Ripetiamo il procedimento su Q_2, Q_3, etc. per ottenere le cifre rimanenti (a_2, a_3, .. a_n).

☞ In pratica, il procedimento da seguire e`:

Sia N il numero.
1. Si divide N per la nuova base p; sia Q il quoziente ed R il resto.
2. Si converte R nella corrispondente cifra della nuova base p.
3. Si aggiunge la cifra cosi' ottenuta a sinistra delle cifre ottenute in precedenza.
4. Se Q=0, fine; Altrimenti poni N = Q e torna al passo 1.

Conversione binaria

Si vuole convertire un numero N(in base 10), nella corrispondente rappresentazione in base 2.

- Applicando il procedimento visto, bisogna effettuare successive divisioni per 2.

- Il risultato e' la sequenza di 0 e 1 ottenuti cosiderando i resti delle divisioni dalla meno significativa alla piu' significativa.

Esempio: Convertire in forma binaria $\mathbf{N_{10}=331}$

Divisione	**Quoziente**	**Resto (a_i)**
331 : 2	165	1
165 : 2	82	1
82 : 2	41	0
41 :2	20	1
20 : 2	10	0
10 : 2	5	0
5 : 2	2	1
2 : 2	1	0
1 : 2	0	1

quindi: $(331)_{10} = (101001011)_2$

Esempio: Convertire in forma binaria $\mathbf{N_{10}=44}$

Divisione	Quoziente	Resto (a_i)
44 : 2	22	0
22 : 2	11	0
11 : 2	5	1
5 : 2	2	1
2 : 2	1	0
1 : 2	0	1

quindi: $(44)_{10} = (101100)_2$

Conversione in base p ≠ 2

Esempio: Convertire in forma ottale $\mathbf{N_{10}=44}$

Divisione	Quoziente	Resto (a_i)
44 : 8	5	4
5 : 8	0	5

quindi: $(44)_{10} = (54)_8$

Esempio: Convertire in forma esadecimale $\mathbf{N_{10}=44}$

Divisione	Quoziente	Resto (a_i)
44 : 16	2	12 (C_{16})
2 : 16	0	2

quindi: $(44)_{10} = (2C)_{16}$

Tabella Riassuntiva

Sistema di numerazione

Decimale	Binario	Ottale	Esadecimale
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Conversioni da forma binaria a ottale ed esadecimale.

Le rappresentazioni ottali ed esadecimali sono interessanti per la facilita' di conversione dalla base due, e viceversa.

- Osserviamo che:

$$8 = 2^3$$
$$16 = 2^4$$

☞ La conversione da base 2 a base 8 si ottiene scomponendo il numero binario in **triple** di cifre binarie (partendo dalla meno significativa), e per ogni tripla ricavando la corrispondente cifra ottale.

$$(101100)_2=(101.100)_2$$
$$(101)_2=(5)_8$$
$$(100)_2=(4)_8$$

quindi $(101100)_2=(54)_8$

☞ La conversione da base 2 a base 16 si ottiene scomponendo il numero binario in **quadruple** di cifre binarie (partendo dalla meno significativa), e per ogni quadrupla ricavando la corrispondente cifra ottale.

$$(101100)_2=(0010.1100)_2$$
$$(0010)_2=(2)_{16}$$
$$(1100)_2=(C)_{16}$$

quindi $(101100)_2=(2C)_{16}$

Aritmetica Binaria: operazioni sui naturali

Definizione delle operazioni aritmetiche elementari:

A	**B**	**r/p**	riporto	A+B	prestito	A-B
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

(r/p esprime il riporto/prestito della colonna precedente)

Somma di due numeri binari naturali:

Viene eseguita incolonnando i numeri e sommando tra loro i bit incolonnati, partendo dai meno significativi, in ordine di peso crescente.

☞ Per la somma di due numeri positivi di lunghezza K possono essere necessari K+1 posti. Se sono

disponibili solo K cifre si genera un errore di **overflow** (o trabocco).

Esempio: $(11011)_2+(00110)_2$

```
11011 +     (27)
00110 =     (6)
--------
100001      (33)
```

Sottrazione di numeri binari naturali:

Viene eseguita incolonnando i numeri e sottraendo tra loro i bit incolonnati, partendo dai meno significativi, in ordine di peso crescente.

Hp: si suppone che si generi sempre un numero positivo

```
1100 -   (12)
0011 =   (3)
-----
1001     (9)
```

Moltiplicazione di numeri binari naturali:

Si utilizza la stessa tecnica usata anche per i numeri in base 10 (somma e scorrimento):

$A = (1011)_2 = (11)_{10}$
$B = (1101)_2 = (13)_{10}$

A×B

```
      1011   x
      1101   =
  -----------
     1011   +
    00000   +
   101100   +
  1011000
-----------
10001111
```

Divisione di numeri binari naturali:

Si usa la tecnica usata anche per i numeri in base 10 (differenza e scorrimento).

$A=(101101)_2=(45)_{10}$
$B=(11)_2=(3)_{10}$

Calcolare A/B:

```
101101     |11
-----------+-----
00         |01111
--
101
011
---
0101
 011
----
  100
  011
-----
   011
   011
------
   000
```

Il risultato della operazione A/B e` quindi $(1111)_2=(15)_{10}$

ESERCIZI:

Effettuare le seguenti operazioni aritmetiche tra numeri binari naturali, ipotizzando di lavorare con un elaboratore con lunghezza di parola (*word*) pari a un byte:

- **Differenza**: A-B, $A=(35)_{10}$, $B=(22)_{10}$

$(35)_{10} = (23)_{16} = (0010\ 0011)_2$
$(22)_{10} = (16)_{16} = (0001\ 0110)_2$

```
0010 0011 -
0001 0110 =
-----------
0000 1101     Prestito: 0
```

Risultato: $A - B = (0000\ 1101)_2 = (0D)_{16} = (13)_{10}$

- **Somma**: A+B, $A=(42)_{10}$, $B=(31)_{10}$

$(42)_{10} = (2A)_{16} = (0010\ 1010)_2$
$(31)_{10} = (1F)_{16} = (0001\ 1111)_2$

```
0010 1010 +
0001 1111 =
-----------
0100 1001
```

Risultato: $A + B = (0100\ 1001)_2 = (49)_{16} = (73)_{10}$

- **Moltiplicazione**: A×B, A=(7)$_{10}$, B=(12)$_{10}$

  (7)$_{10}$ = (7)$_{16}$ = (0000 0111)$_2$
  (12)$_{10}$= (0C)$_{16}$ = (0000 1100)$_2$

```
     00000111 ×
     00001100 =
     ----------
     00000000
    00000000-
   00000111-
 000000111-
     ----------
     01010100
```

Risultato: (0101 0100)$_2$ = (54)$_{16}$ = (84)$_{10}$

- **Divisione**: A/B, A=(23)$_{10}$, B=(7)$_{10}$
  (23)$_{10}$= (17)$_{16}$ = (0001 0111)$_2$
  (7)$_{10}$ = (7)$_{16}$ = (0000 0111)$_2$

```
10111     |111
------------------------------------------
000       |011
--
1011
0111
----
01001
 0111
-----
 0010
```

Risultato: Quoziente= (0000 0011)$_2$ = (3)$_{10}$
Resto= (0000 0010)$_2$ = (2)$_{10}$

Numeri Relativi

Consideriamo l'insieme dei numeri relativi (**interi**)

$$Z=\{-\infty, ..., -1, 0, +1,... +\infty\}$$

Vogliamo rappresentare gli elementi di questo insieme in forma binaria.

Avendo sempre un numero limitato di bit, possiamo utilizzarne uno per la rappresentazione del segno (+ o -).

Rappresentazione con modulo e segno

Il primo bit di un numero intero viene utilizzato come bit di segno (0 positivo, 1 negativo). Gli altri bit indicano il modulo (valore assoluto) del numero

Ad esempio:

- parole di 5 bit:
  +5 = 00101
  -10 = 11010

- parole a 16 bit:
  +13 = 0000000000001101
  -13 = 1000000000001101

Rappresentazione con modulo e segno

☞ Tramite m cifre in base 2 e' possibile rappresentare $\mathbf{2^m-1}$ numeri diversi, da $\mathbf{-(2^{m-1} - 1)}$ a $\mathbf{+(2^{m-1} -1)}$.

Ad esempio:

m = 3, da $-(2^2 - 1)=-3$ a $-(2^2 - 1)=3$
m = 16, da -32767 a +32767
m = 32, da -2147483647 a + 2147483647

☞Abbiamo due rappresentazioni diverse per lo zero:

-0 = 10000
+0 = 00000

Ad esempio:

m = 2 ==> posso rappresentare $2^2 -1 = 3$ numeri:

Valore Binario	Valore Decimale
00	+0
01	+1
10	-0
11	-1

Rappresentazione in Complemento

Per semplificare le operazioni su interi (con segno) si adotta una rappresentazione dei **numeri negativi** in **complemento**.

Complemento alla base:

dato un numero X in base b di n cifre, il complemento alla base e` definito come:

$$\mathbf{b^n - X}$$

Esempi:

- n = 2 , b = 10, X = 64
  Il complemento a 10 di 64 e` $10^2 - 64 = 36$

- n = 5 , b = 2, X = 01011
  Il complemento a 2 di X e` $2^5 - X = 100000-01011 = 10101$.

☞ In pratica, il principio e` che la somma del numero piu` il suo complemento, dia una stringa di n cifre a zero.

Complemento alla base -1:

dato un numero X in base b di n cifre, il complemento alla base -1 e` definito come:

$$(b^n-1)-X$$

Esempio:

- n = 5 , b = 2, X = 01011
  Il complemento a 1 di X e`
  $(2^n - 1)-X = 11111 - 01011 = 10100.$

☞ Osserviamo che il risultato e` la sequenza di cifre che si ottiene complementando a 1 ogni singolo bit.

Riassumendo:

Supponiamo di voler rappresentare un numero X tramite n cifre binarie.

- la rappresentazione in **complemento a 2** si ottiene sottraendo X da 2^n
- la rappresentazione in **complemento a 1** si ottiene sottraendo X da 2^n-1.

In Pratica:

- Il **complemento a 1** di un numero binario X (rappresentato come intero positivo) si ottiene complementando tutti i bit (cioe' scambiando 0 con 1, e viceversa).
- Il **complemento a 2** si ottiene prima calcolando il complemento a 1, e poi sommandovi 1.
  (Infatti, si puo` scrivere l'operazione come:
  $2^n - X$ come $2^n - 1 - X + 1$)

Rappresentazione in Complemento

Esempio: n=4

Intero	Modulo	Segno + modulo	Compl. a 1	Compl. a 2
-7	0111	1111	1000	1001
-6	0110	1110	1001	1010
-5	0101	1101	1010	1011
-4	0100	1100	1011	1100
-3	0011	1011	1100	1101
-2	0010	1010	1101	1110
-1	0001	1001	1110	1111
-0	0000	1000	1111	---

- **Rappresentazione in complemento a 1:** I numeri positivi sono rappresentati dal loro modulo ed hanno il bit piu` significativo a zero. I numeri negativi si ottengono complementando a 1 i corrispondenti moduli, segno compreso. Pertanto hanno il primo bit sempre a 1.

- **Rappresentazione in complemento a 2:** I numeri positivi sono rappresentati dal loro modulo ed hanno il bit piu` significativo a zero. I numeri negativi si ottengono complementando a 2 i corrispondenti moduli, segno compreso. Pertanto

hanno il bit del segno sempre a 1. (In questo caso si ha una sola rappresentazione dello zero: 00000).

☞ Su 5 bit si possono rappresentare i numeri da -16 (10000) a +15 (01111).

☞ Il numero piu` piccolo rappresentabile (-16) non ha il corrispettivo positivo (per rappresentare + 16 occorrerebbero 6 bit).

Esercizi:

- Si rappresentino i seguenti numeri in complemento a 2 avendo 8 bit a disposizione:

	Modulo	Compl.a 1		Compl.a2
- 34 ⇒	0010 0010	⇒1101 1101	⇒	1101 1110
-25 ⇒	0001 1001	⇒1110 0110	⇒	1110 0111
+46			⇒	0010 1110
- 23 ⇒	0001 0111	⇒1110 1000	⇒	1110 1001
+66			⇒	0100 0010
+72			⇒	0100 1000
-120 ⇒	0111 1000	⇒1000 0111	⇒	1000 1000
- 10 ⇒	00001010	⇒1111 0101	⇒	1111 0110

- Interpretare la sequenza di bit 1001 0001 1100 0101 come:
  a) numero naturale
  b) numero relativo in modulo e segno
  c) numero relativo in complemento a due.

a) Interpretando la sequenza come **numero naturale**:

$1001\ 0001\ 1100\ 0101 = 91C5_{16} = 9 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 12 \times 16 + 5 = 37317$

b) Interpretando la sequenza come numero relativo in modulo e segno:

1 001 0001 1100 0101 = - $11C5_{16}$ = - $(1 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 12 \times 16 + 5)$ = - 4549

c) Interpretando la sequenza come numero relativo in complemento a due:

1001 0001 1100 0101

- ricaviamo il complemento a 1
  1001 0001 1100 0101 - 1 = 1001 0001 1100 0100

- complementiamo i bit:
  - 0110 1110 0011 1011 =
  - $6E3B_H$ = - $(6 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 3 \times 16 + 11)$ =
  - 28219

Operazioni aritmetiche sui numeri relativi

Somma algebrica:

Sfrutta la rappresentazione in complemento a 2.
Si sommano i numeri per colonna incluso il bit del segno, ignorando l'eventuale riporto sul bit del segno.

Esempi:

```
   0 000101  (+5)       0 000101  (+5)

   0 001000  (+8)       1 111000  (-8)
   ------------     -------------
   0 001101  (+13)      1 111101  (-3)


   1 111011  (-5)       1 111011  (-5)

   0 001000  (+8)       1 111000  (-8)
   ------------     -------------
(1)0 000011  (+3)    (1)1 110011  (-13)
```

- Consideriamo 8 bit: (il numero e' compreso fra -128 e 127)

  70 = 01000110
  70 + 70 =

  01000110 +
  01000110 =

  10001100 (OVERFLOW)

  -70 - 70 = cioe` (-70) + (-70)
  -70 in complemento a 2: 10111010

  10111010 +
  10111010 =
  ----
  (1)01110100 (OVERFLOW)

☞ Si puo` verificare **overflow** solo quando gli operandi hanno lo stesso segno (l'operazione produce un numero di segno opposto !!).

Sottrazione:

Se i numeri sono rappresentati in complemento a 2 l'operazione di sottrazione si effettua mediante somma (vantaggio della rappresentazione in complemento a 2).

Esercizio:

Effettuare le seguenti operazioni, supponendo di operare con una rappresentazione dei numeri su un byte e in complemento a due:

-34 + 25	-34 + 46	-23 - 34
66 + 72	-120 -10	

Soluzione

I valori indicati risultano così rappresentati:

- 34	1101 1110
+25	0001 1001
+46	0010 1110
- 23	1110 1001
+66	0100 0010
+72	0100 1000
-120	1000 1000
- 10	1111 0110

Da cui:

```
-34 =   1101 1110
+25 =   0001 1001
        ---------
        1111 0111 =-00001001= -9

-34 =   1101 1110
+46 =   0010 1110
        ---------
        (1)0000 1100 =+00001100=+12
```

```
-34 =   1101 1110
-23 =   1110 1001
        ---------
    (1)1100 0111 =-00111001=-57

+66 =   0100 0010
+72 =   0100 1000
        ---------
        1000 1010=- 01110110=-118
```
⇒ **OVERFLOW**

```
-120   =   1000 1000
-10 =   1111 0110
        ---------
    (1)0111 1110 =+01111110=+126
```
⇒ **OVERFLOW**

Moltiplicazione e divisione tra numeri relativi:

- Utilizzare i numeri in valore assoluto ed utilizzare le operazioni viste sui numeri naturali (somma/differenza e scorrimento).

- Il segno si determina in base al segno degli operandi.

☞ L'applicazione delle operazioni direttamente sui numeri in complemento e' in generale scorretta.

Infatti: $(-3) \times (+3)$

I valori indicati risultano così rappresentati con 4 bit in complemento a 2:
-3 = - 0011 = 1101
+3 = 0011
Il risultato del calcolo, -9, non è rappresentabile su soli 4 bit. Supporremo disponibile allo scopo una parola di un byte.

```
        1101 ×
        0011 =
        ------
        1101
       1101
      0000
     0000
     --------
   00100111
```

che, su un byte, è interpretabile come numero positivo, di valore 39.

Operazione di shift

Shift verso sinistra:

- Dalla rappresentazione dei numeri discende immediatamente che lo scorrimento verso sinistra di tutte le cifre del numero di una posizione con l'inserimento di uno zero nella posizione di destra equivale a moltiplicare il numero per la base.

☞ Lo scorrimento di k posizioni verso sinistra equivale a moltiplicare il numero per b^k.

Shift verso destra:

- Lo scorrimento (shift) verso destra di tutte le cifre del numero di una posizione con l'inserimento di uno zero nella posizione di sinistra, equivale a dividere il numero per la base (cioe` a moltiplicare il numero per $b^{-1)}$.

☞ Lo scorrimento di k posizioni verso destra equivale a moltiplicare il numero per b^{-k}.

Numeri Frazionari

Sono numeri reali compresi fra zero e 1;

Rappresentazione dei numeri frazionari:

Sia:

$\boldsymbol{\alpha}$={0,1,2,...p-1} ,

b=p

Dato un numero frazionario N, la sua rappresentazione in base p e` data da una sequenza di cifre :

$$\mathbf{0,a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ldots\ a_{-n}}$$

dove $\mathbf{a_{-i} \in \alpha}$, $\forall$ **i=0,..n**.

Il valore di N e` dato dalla formula:

$$N_{\mathbf{p}} = \mathbf{a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots a_{-n} \cdot p^{-n}}$$

o, in forma piu` compatta:

$$N_{\mathbf{p}} = \Sigma_{\mathbf{i=1,..n}}\ a_{-i} \cdot p^{-i}$$

Ad esempio:

- Base decimale: **p=10, N_{10}= 0,587**

  $(0,587)_{10} = 5 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}$.

- Binario: **p= 2, N_2= 0,1011**

$$(0,1011)_2=(1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}+1\times2^{-4})_{10}$$
$$= (0,6975)_{10}$$

Conversione di un numero decimale frazionario in base ≠ 10

$$N_p = a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots a_{-n} \cdot p^{-n}$$

- Moltiplico N_p per p:

$$N_p \cdot p = a_{-1} + a_{-2} \cdot p^{-1} + \ldots a_{-n} \cdot p^{-n+1}$$

Il risultato e` un **numero reale >1**:

- Parte **intera** $(N_p \times p) = a_{-1}$
- Parte **frazionaria** $(N_p \times p)$
  $= a_{-2} \times p^{-1} + \ldots + a_{-n} \times p^{-n+1} = \mathbf{M_1}$

- Applichiamo ancora la **moltiplicazione** per p sulla parte frazionaria M_1 ottenuta nella divisione precedente:
  - Parte **intera** $(M_1 \times p) = a_{-2}$
  - Parte **frazionaria** $(M_1 \times p)$
    $= a_{-3} \times p^{-1} + \ldots + a_{-n} \times p^{-n+2} = \mathbf{M_2}$

- Ripetiamo il procedimento su M_3, M_4, etc. per ottenere le cifre rimanenti (a_{-3}, a_{-4}, .. a_n).

☞ In pratica, il procedimento da seguire e`:

Sia N il numero frazionario.
1. Si moltiplica N per la nuova base; sia I la parte intera e M la parte frazionaria.
2. Si converte I nella corrispondente cifra della nuova base.
3. Si aggiunge la cifra cosi' ottenuta a destra delle cifre ottenute in precedenza (la prima cifra immediatamente a destra della virgola)
4. Se F=0 (oppure si sono ottenute le cifre richieste) fine; Altrimenti poni N = F e torna al passo 1.

Conversione binaria di numeri frazionari:

- Si ottiene effettuando successive moltiplicazioni per due.

- Il risultato e' la sequenza di zeri e uni ottenuti cosiderando le parti intere delle moltiplicazioni dalla piu' significativa alla meno significativa.

Ad Esempio:

- Convertire in base 2: $\mathbf{N_{10}=0,875}$

Moltiplicazione	Parte Frazionaria	Parte Intera (a_{-i})
$0,875 \times 2$	0,75	1 (a_{-1})
$0,75 \times 2$	0,5	1 (a_{-2})
$0,5 \times 2$	0	1 (a_{-3})

quindi $(0,875)_{10} = (0,111)_2$

- Convertire in base 8: $\mathbf{N_{10}=0,875}$

Moltiplicazione	Parte Frazionaria	Parte Intera (a_{-i})
$0,875 \times 8$	0	7

quindi $(0,875)_{10} = (0,7)_8$

- Convertire in base 16: $\mathbf{N_{10}=0,875}$

Moltiplicazione	Parte Frazionaria	Parte Intera (a_{-i})
$0,875 \times 16$	0	14 ($\mathbf{E_{16}}$)

quindi $(0,875)_{10} = (0,E)_{16}$

Conversione di numeri frazionari in base non decimale

☞ Non sempre si ottiene una conversione esatta: ad esempio convertiamo $(0,8)_{10}$ in binario.

Moltiplicazione	Parte Frazionaria	Parte Intera (a_{-i})
$0,8 \times 2$	0,6	1
$0,6 \times 2$	0,2	1
$0,2 \times 2$	0,4	0
$0,4 \times 2$	0,8	0
$0,8 \times 2$	0,6	1
....	...	...

quindi $(0,8)_{10} = (0,\underline{1100})_2$ **periodico**

- Quindi uno stesso numero puo` avere un numero finito di cifre in una base ed un numero infinito in un'altra.

- Quindi nella rappresentazione interna si puo` introdurre un **errore di troncamento**.

Rappresentazione dei Numeri Reali

Consideriamo l'insieme R dei numeri reali.

Ogni elemento di R, in generale, puo` essere esepresso come somma di un intero con un numero frazionario.

In pratica, un numero reale e` individuato univocamente da:

- una parte intera I
- una parte frazionaria F

Rappresentazione dei reali in virgola fissa

Un numero prefissato di cifre viene dedicato alla parte intera ed a quella frazionaria (**rappresentazione in virgola fissa**).
Quindi:

- Si calcola la rappresentazione della parte intera nella base data con la formula:

$$N_p = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0$$

- Si calcola la rappresentazione della parte frazionaria nella base data (tenendo conto del numero di cifre disponibili) con la formula:

$$N_p = a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots a_{-n} \cdot p^{-n}$$

- Si giustappongono le due rappresentazioni:

  <rappresentazione I> . <rappresentazione F>

Ad esempio:

$331{,}6975_{10} = 00101001011{,}10110_2$
(riservando 11 bit per la parte intera e 5 per quella frazionaria).

☞ La precisione e` variabile e puo` essere scarsa per numeri di valore prossimo allo zero

Rappresentazione dei numeri reali in virgola mobile

- Ad un numero reale r vengono associati due numeri:
  - **m** = **mantissa**
  - **n** = **esponente** (o caratteristica)

Mantissa:

- e` un numero frazionario con segno. Il suo valore e` quindi compreso nell'intervallo]-1, +1[.
- mantissa **normalizzata**: se la prima cifra dopo la virgola e` diversa da 0. Il valore assoluto della mantissa, in questo caso, $\in$ [1/p, 1[

Esponente:

- e` un intero con segno.

☞ la mantissa e l'esponente sono legati dalla relazione:

$$\mathbf{r = m \times b^n}$$

dove b e' un numero intero che indica una base utilizzata per la notazione esponenziale (in generale, se p e` la base del sistema di numerazione, $\mathbf{p \neq b}$).

Rappresentazione in virgola mobile

Esempi:

- **p=b=10, r = -331,6975**

  r si rappresenta con m=-0,3316975 e n=3

- Conversione in binario, virgola mobile (**p=b=2)**: **r = $12,5_{10}$**

  $12,5_{10} = 1100,1_2$

  $m = 0,11001_2$ $n = 100_2$

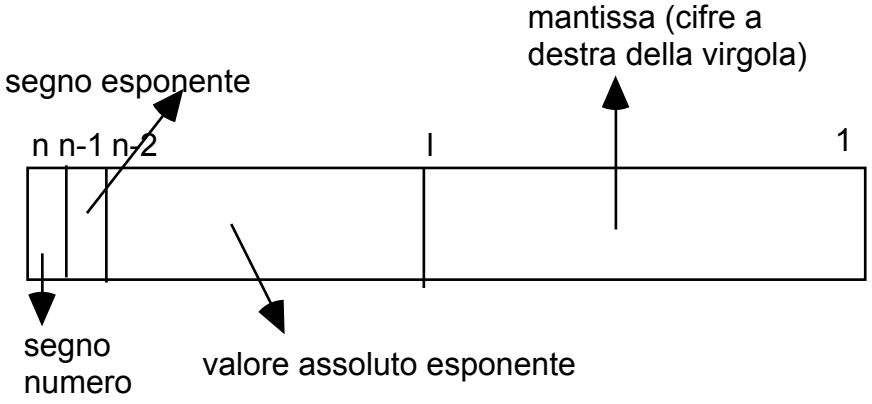
- Conversione in binario, virgola mobile (p=b=2): **r=$26,5_{10}$**

  $26,5_{10} = 11010,1_2$

  $m = 0,110101_2$ $n = 101_2$

Rappresentazione binaria in virgola mobile:

Per ogni numero reale vengono utilizzati n bit:



Ad esempio:

Supponiamo di avere a disposizione **32 bit**, di cui:

- 1 bit per il segno della mantissa;
- 1 bit per il segno dell'esponente;
- 8 bit per il valore assoluto dell'esponente;
- 22 bit per la mantissa.

⇒ Rappresentazione in virgola mobile di **r= 26,5**

$$r = 0{,}110101_2 \times 2^{101_2}$$

esponente		mantissa
0 | 0 |	00000101 |	11010100000000000000

⇒ Rappresentazione in virgola mobile di **r=0,3125**

$$r = 0{,}101_2 \times 2^{-1_2}$$

esponente		mantissa
0 | 1 |	00000001 |	10100000000000000000

Rappresentazione binaria in virgola mobile

- poiche' la mantissa comincia sempre con 1, si puo' utilizzare questo come bit di segno.

- invece di riservare un bit per il segno dell'esponente, in alcuni casi si adotta la rappresentazione in complemento a 2 dell'esponente.

Esempio: complemento a 2 per l'esponente.

32 bit:

1 bit segno mantissa;
8 bit valore dell'esponente (in compl. a 2);
23 bit mantissa.

- $r=26,5 = 0,110101_2 \times 2^{101_2}$

esponente mantissa

0 | 00000101 | 11010100000000000000000

- $r=0,3125 = 0,101_2 \times 2^{-1_2}$

0 | 11111111 | 10100000000000000000000

ESERCIZIO:

Rappresentare su 16 bit (di cui 8 di esponente in complemento a due, uno per il segno e 7 di mantissa) i seguenti valori:

0.75 **0.1** **13.33**

Soluzione

a) r=0.75

Parte intera: 0
Parte frazionaria: algoritmo delle moltiplicazioni successive. Si ha:

$0.75 \times 2 = 1.5 \Rightarrow F = 0.5,\ I = 1$
$0.5 \times 2 = 1.0 \Rightarrow F = 0.0,\ I = 1$
$0.0 \times 2 = 0.0 \Rightarrow F = 0.0,\ I = 0$
.....

Il valore richiesto è dunque:
<parteIntera>.<parteFrazionaria>=0.11

$\Rightarrow$ Non è necessaria alcuna normalizzazione.

Rappresentazione finale di 0.75:

esponente	segno	mantissa
00000000	**0**	**1100000**

b) r=0.1

Parte **intera**: 0
Parte **frazionaria**: si usa l'algoritmo delle moltiplicazioni successive:

$0.1 \times 2 = 0.2 \Rightarrow F = 0.2, \quad I = 0$
$0.2 \times 2 = 0.4 \Rightarrow F = 0.4, \quad I = 0$
$0.4 \times 2 = 0.8 \Rightarrow F = 0.8, \quad I = 0$
$0.8 \times 2 = 1.6 \Rightarrow F = 0.6, \quad I = 1$
$0.6 \times 2 = 1.2 \Rightarrow F = 0.2, \quad I = 1$
.....

$\Rightarrow$ rappresentazione **approssimata** perche` si ottiene un numero periodico.

$0.1_{10} \Rightarrow$ 0. 0<u>0011</u>= 0.0001100110011...

- Normalizzando:
  mantissa = 0. 1 100110
  esponente=-3= -(11)=11111100+1=11111101

esponente	segno	mantissa
11111101	**0**	**1100110**

Si noti che la mantissa viene troncata al numero disponibile di bit *solo dopo aver normalizzato*.

☞ C'e` di un *errore di troncamento:* il numero realmente rappresentato non è 0.1, ma:

$0.110011 \times 2^{-3} = (1/2 + 1/4 + 1/32 + 1/64) \times 1/8 =$
$= 0.099609375$

c) r= 13.33

Parte **intera**: $13 = (1101)_2$

Parte **frazionaria**: 0.33con l'algoritmo delle moltiplicazioni successive:

$0.33 \times 2 = 0.66 \Rightarrow$ F = 0.66 I = 0
$0.66 \times 2 = 1.32 \Rightarrow$ F = 0.32, I = 1
$0.32 \times 2 = 0.64 \Rightarrow$ F = 0.64, I = 0
$0.64 \times 2 = 1.28 \Rightarrow$ F = 0.28, I = 1
$0.28 \times 2 = 0.56 \Rightarrow$ F = 0.56, I = 0
$0.56 \times 2 = 1.12 \Rightarrow$ F = 0.12, I = 1
.....

quindi: r=13.33=1101.010101....

Normalizzando:

m=0.1101 010101...
esponente = +4=100

esponente	segno	mantissa
00000100	**0**	**1101010**

Valutiamo l'errore: il numero realmente rappresentato vale:

$0.1101010 \times 2^4 = (1/2+1/4+1/16+1/64) \times 16 = 53/64 \times 16 = 13.25$

Precisione nella rappresentazione dei numeri reali

Si puo', in generale, osservare che:

- Quanto maggiore e` il numero di bit riservati alla mantissa tanto maggiore e' il numero di cifre significative che possono essere memorizzate (precisione);

- Quanto maggiore e` il numero di bit riservati all' esponente tanto maggiore e` l'ordine di grandezza della cifra che puo' essere rappresentata.

Precisione:
e` data dal numero di cifre in base 10 rappresentabili con la mantissa.

Ad esempio:
Se la mantissa e' rappresentata da 20 bit, la precisione e' di 6 cifre (max valore rappresentabile dalla mantissa 2^{20}-1 circa = 10^6 = 1000000).

☞ Le cifre meno significative della mantissa che non possono essere rappresentate nel numero di bit a disposizione vengono eliminate mediante **troncamento** od **arrotondamento**.

Troncamento e arrotondamento

Esempio:

$r=1029_{10} = 0{,}10000000101 \times 2^{11}$

con:

- 10 bit per la mantissa
- 5 bit per l'esponente

Rappresentazione:

- con **troncamento**:

  0 01011 1000000010 (=1028)

- con **arrotondamento**:

  0 01011 1000000011 (=1030)

Esempio:

$r= 0{,}8_{10} = 0{,}110011001100..... \times 2^{0}$ (periodico)

con:

- 10 bit per la mantissa
- 5 bit per l'esponente

Rappresentazione:

- con **troncamento (**e con **arrotondamento)**:

  0 00000 1100110011 (~0,7998)

Valori massimi e minimi rappresentabili:

Dipendono dall'esponente e dal metodo di rappresentazione.

Se il valore assoluto dell'esponente e' rappresentato da 10 bit:

- il **massimo numero reale** e' (in valore assoluto):

$$1 \times 2^{1023} \sim 10^{307}$$

- il **minimo numero reale** e' (in valore assoluto):

$$0{,}1_2 \times 2^{-1023} \sim 0{,}5 \times 10^{-307}$$

Accuratezza della macchina

E' il piu' piccolo numero che, aggiunto ad 1,0 produce un risultato diverso da 1,0.
tipicamente se i bit della mantissa sono 24, è
$0{,}00000000000000000000001 \times 2^{0} = 2^{-24}$
cioè circa 6×10^{-8}

Operazioni aritmetiche con numeri reali

Somma:
Si opera nel modo seguente:

1) si aumenta l'esponente del piu' piccolo, contemporaneamente spostando la mantissa a destra, fino a che i due esponenti sono uguali.
2) si sommano le due mantisse insieme.
3) si normalizza il risultato.

In questo caso si possono generare errori:

Errore di incolonnamento:

Si manifesta nel sommare numeri con esponenti diversi.

Ad esempio:
Supponiamo di lavorare in base 10 con 5 bit per la mantissa normalizzata.
$0.12465 \times 10^{1} + 0.32999 \times 10^{-2} =$
$0.12465 \times 10^{1} + 0.00032 \times 10^{1} =$
riportando tutto all'esponente maggiore si perdono le ultime 3 cifre del secondo addendo (cioe` la quantita` 0.00999×10^{-2}).

Errore di cancellazione:

Si manifesta nel sottrarre numeri molto simili fra loro.

Ad esempio:
Supponiamo di lavorare in base 10 con 5 bit per la mantissa normalizzata.

Si consideri la seguente espressione:
0.3340239 - 0.3324757
Che produce il valore: 0.15482×10^{-2}

Nel calcolatore viene valutata:

$0.33402 \times 10^{0} = X1$

$0.33247 \times 10^{0} = X2$

$X_1 - X_2 = 0.00155 \times 10^{0}$

Normalizzando:

$X_1 - X_2 = 0.155??\times 10^{-2}$

L'elaboratore introduce 00 al posto di ?? producendo 0.15500×10^{-2} . Le ultime due cifre non hanno pero` significato (il numero e` affetto da errore).

☞ Questi errori fanno si` che la somma non goda sempre della proprieta` associativa.

Esempio:

A = -0.12344×10^{0}

B = 0.12345×10^{0}

C= 0.32741×10^{-4}

- Valutiamo **A + (B+C)**

B + C =

0.12345×10^{0} +

0.00003×10^{0} errore di incolonnamento

0.12348×10^{0} +

A -0.12344×10^{0}

0.00004×10^{0}

Normalizzazione:

0.40000×10^{-4} errore di cancellazione

- Valutiamo **(A + B)+C** =

A + B=

B 0.12345×10^{0} +

A -0.12344×10^{0}

0.00001×10^{0}

Normalizzazione:

0.10000×10^{-4} + errore di cancellazione

C 0.32741×10^{-4}

0.42741×10^{-4}

ESERCIZIO

Effettuare la somma:

$$4.6 + 0.5$$

con numeri rappresentati in floating point su 16 bit (di cui 8 di esponente in complemento a due, uno per il segno e 7 di mantissa), verificando i risultati ottenuti.

Soluzione

$4.6 = 0100.1001\ 1001.... = 0.100\ 1001 \times 2^3$

$0.5 = 0000.10000000... = 0.100\ 0000 \times 2^0$

Allineando i numeri in modo che abbiano identico esponente:

$4.6 = 0.100\ 1001 \times 2^3 +$

$0.5 = 0.000\ 1000 \times 2^3 =$

$0.101\ 0001 \times 2^3 = 101.0001 =$

$5 + 1/16 = 5.0625$

Valore atteso per il risultato 5.1.

ESERCIZIO

Effettuare la seguente moltiplicazione fra numeri rappresentati in floating point su 16 bit (di cui 8 di esponente in complemento a due, uno per il segno e 7 di mantissa), verificando il risultato ottenuto:

$$2.15 \times (-4.8)$$

Soluzione

Si ha:

$2.15 = 0010.00100110\ldots = 0.100\ 0100 \times 2^2$

$-4.8 = -0100.1100110\ldots = -0.100\ 1100 \times 2^3$

Per moltiplicare i due valori è sufficiente moltiplicare le mantisse e sommare gli esponenti.

Poiché però il prodotto di due numeri di 7 bit richiede in generale 14 bit per essere esattamente rappresentato, mentre anche la mantissa risultante dovrà essere rappresentata in 7 bit (evidentemente, i più significativi), l'operazione potrà dare luogo ad approssimazioni.

```
          100 0100 x
          100 1100 =
          ----------
        100 0100--
       1000 100-
    1000100 ---
   ------------------
(0)1010000 110000
```

Isolando i 7 bit più significativi si ha:

$R = -0.01010000 \times 2^5 = -0.1010000 \times 2^4 = -10$

Risultato teorico: -10.32.

Codifica dei caratteri

I caratteri di un testo vengono codificati tramite sequenze di bit, utilizzando un **codice** di traduzione.

Quello piu' usato e' il **codice ASCII** (American Standard Code for Information Interchange).

Utilizza 7 bit. Rappresenta 128 caratteri. Mancano, ad esempio i caratteri accentati, greci etc.

Esempio:
0 e' codificato come 048_{10} e 30_{16} (e $011\ 0000_2$)
9 e' codificato come 057_{10} e 39_{16}
a e' codificato come 097_{10} e 61_{16}
z e' codificato come 122_{10} e $7A_{16}$

Vengono inseriti in un byte per cui 1 bit viene normalmente ignorato. In trasmissione funziona come **bit di parita'** per individuare errori.
Il valore (0 o 1) del bit di parita` e` scelto in modo che la sequenza di 1 sia pari.

Ad esempio: 0 => 30_{16} => **0** $011\ 0000_2$
Il codice **ASCII esteso** utilizza invece 8 bit (256 caratteri)

Tabella dei Codici ASCII

0	NUL	1	SOH	2	STX	3	ETX	4	EOT	5	ENQ	6	ACK	7	BEL
8	BS	9	HT	10	NL	11	VT	12	NP	13	CR	14	SO	15	SI
16	DLE	17	DC1	18	DC2	19	DC3	20	DC4	21	NAK	22	SYN	23	ETB
24	CAN	25	EM	26	SUB	27	ESC	28	FS	29	GS	30	RS	31	US
32	SP	33	!	34	"	35	#	36	$	37	%	38	&	39	'
40	(	41	)	42	*	43	+	44	,	45	-	46	.	47	/
48	0	49	1	50	2	51	3	52	4	53	5	54	6	55	7
56	8	57	9	58	:	59	;	60	<	61	=	62	>	63	?
64	@	65	A	66	B	67	C	68	D	69	E	70	F	71	G
72	H	73	I	74	J	75	K	76	L	77	M	78	N	79	O
80	P	81	Q	82	R	83	S	84	T	85	U	86	V	87	W
88	X	89	Y	90	Z	91	[	92	\	93	]	94	^	95	_
96	`	97	a	98	b	99	c	100	d	101	e	102	f	103	g
104	h	105	i	106	j	107	k	108	l	109	m	110	n	111	o
112	p	113	q	114	r	115	s	116	t	117	u	118	v	119	w
120	x	121	y	122	z	123	{	124	|	125	}	126	~	127	DEL

Altri codici:

- ad esempio, sono EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code) (8 bit) per elaboratori IBM, etc;

Rappresentazioni Binarie

Riassumendo:

- **100** come intero con n = 32 bit (4 bytes)

100 : 2 0
 50 : 2 0
 25 : 2 1
 12 : 2 0
  6 : 2 0
  3 : 2 1
  1 : 2 1

00000000000000000000000001100100

- **-100**

11111111111111111111111110011100

- **100. come reale in virgola mobile**
  - 1 byte per l'esponente
  - 3 bytes per la mantissa.

$(100.)_{10} = (1100100.)_2$
Normalizzato:

$$0.1100100 \times 2^7$$

Esponente: 7 = 00000111
0 00000111 10010000000000000000000

Il primo bit e' il segno. Il primo bit della parte frazionaria e' omesso perche' essendo normalizzata e' sempre 1

- **-100. come reale in virgola mobile:**

100000111 10010000000000000000000

- **'100'** come carattere con codifica ascii

00110001 31_{16}
00110000 30_{16}
00110000

- **'-100'** come carattere con codifica ascii

00101101 ....

Codifica delle immagini

Codificate come sequenze di 0 ed 1 (*bit map*).

Digitalizzazione, passaggio da una immagine ad una sequenza binaria.

L'immagine è vista come una matrice di **punti** (*pixel*).

Ad ogni punto è associato un numero che corrisponde ad un particolare **colore** o, per immagini in bianco e nero, ad un **livello di grigio** (numero potenza di 2).

Una maggiore qualità di immagine implica una maggiore occupazione di memoria:

numero maggiore di punti per pollice (*dpi*, dot per inch; 1 pollice = 2.54 cm);

numero maggiore di colori (*palette*).

Ad esempio, per una fotografia di bassa qualità (80-100 dti) occorrono circa 1/8 Mbyte; per una buona riproduzione in b/n (1200 dti), circa 16 Mbyte.

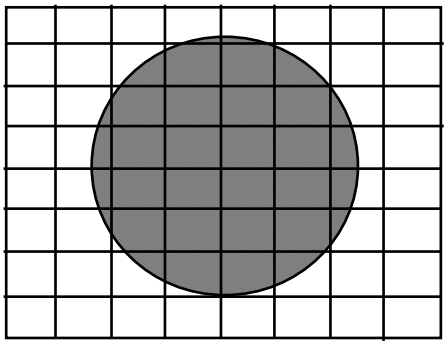
Per interpretare le sequenze di bit occorre conoscere:

dimensioni dell'immagine;
risoluzione (misurata in dpi);
numero di colori o sfumature.

Codifica delle Immagini

Standard di codifica: TIFF (Tagged Image File Format) utilizza tecniche di compressione, GIF, etc.

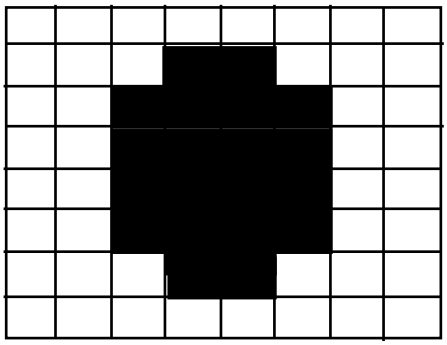
Esempio:



64 pixel, immagine a due colori (bianco e nero).

Serve un solo bit per codificare la tonalita` di colore, per ciascun pixel.

In totale 64 bit (8 byte).



00000000
00011000
00111100
00111100
00111100
00111100
00011000
00000000