

# Capitolo 3

## Modelli

- **Macchine combinatorie**
- **Macchine sequenziali**
  - ❖ **asincrone**
  - ❖ **sincrone**

# Il modello del "blocco" o "scatola nera"

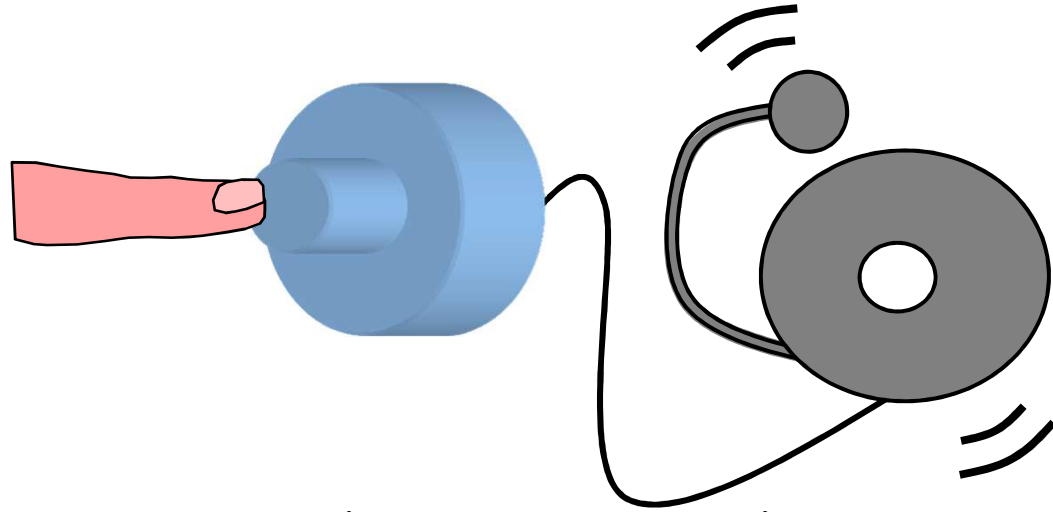
$i \in I$ : alfabeto  
di ingresso

$u \in U$ : alfabeto  
di uscita



F: relazione di **ingresso/uscita** o di **causa/effetto**

# Il campanello



<i>i: Pulsante</i>	<i>u: Suoneria</i>
Premuto	din
Rilasciato	nessun suono

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{i})$$

**Macchina combinatoria**

	<i>i: Pulsante</i>	<i>u: Suoneria</i>
$t_0$	Premuto	din
$t_1$	Rilasciato	nessun suono
$t_2$	Rilasciato	don
$t_3$	Rilasciato	nessun suono

$$\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{F}(\mathbf{i}(t_i), \mathbf{i}(t_{i-1}), \dots)$$

**Macchina sequenziale: a parità d'ingresso,  
risposte diverse ad istanti diversi**

# Altri esempi

$$u = \sqrt{i}$$

dato

9

25

49

risultato

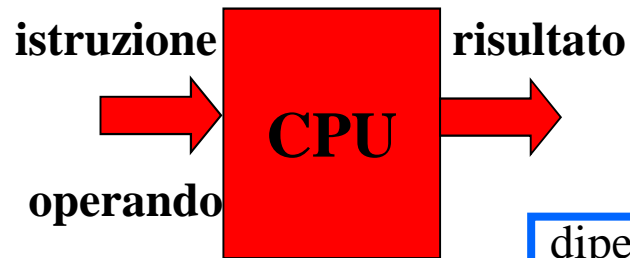
3

5

7

dipende dal dato

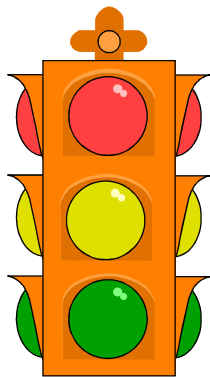
t



risultato

dipende anche dalle **istruzioni** e dai **dati** precedenti

t



dipende dal tempo

V

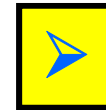
G

R

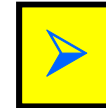
t

# Classificazione delle macchine

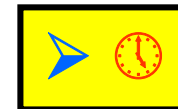
Macchina combinatoria



Macchina sequenziale asincrona



Macchina sequenziale sincrona



Evento che può modificare l'uscita

➤ modifica dell'ingresso

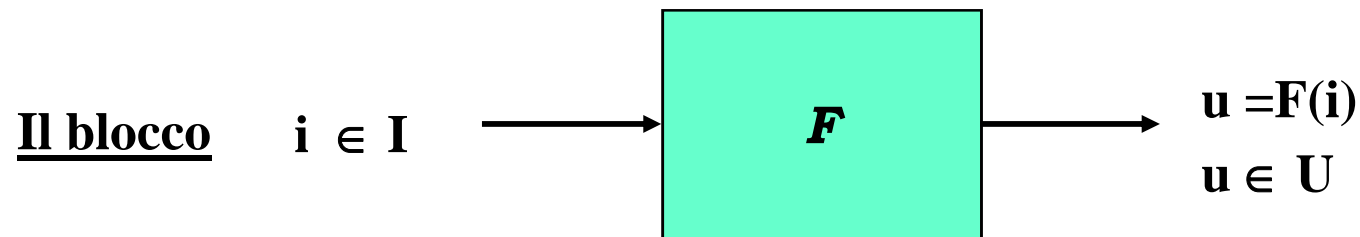
🕒 trascorrere del tempo

A bright yellow starburst shape with a black outline, centered on the page. The starburst has multiple points of varying lengths and angles, creating a jagged, sunburst-like appearance.

**La macchina  
combinatoria**

# Macchina combinatoria “ideale”: la funzione

Elaborazione combinatoria: per ogni  $i \in I$  esiste un solo  $u \in U$  che gli corrisponde. **NON c'è MEMORIA, NON c'è RETROAZIONE**



# Descrizione del comportamento

## La tabella

**i**: var. indipendente

**u**: var. dipendente

<b>i</b>	<b>u = F(i)</b>
<b>a<sub>1</sub></b>	<b>b<sub>2</sub></b>
<b>a<sub>2</sub></b>	<b>b<sub>3</sub></b>
<b>a<sub>3</sub></b>	<b>b<sub>2</sub></b>
<b>a<sub>4</sub></b>	<b>b<sub>3</sub></b>
<b>a<sub>5</sub></b>	<b>b<sub>1</sub></b>

**B<sup>n</sup> → B<sup>m</sup>**

## L'espressione

**ADDER: u = i<sub>1</sub> + i<sub>2</sub>**

**SELETTORE: u = i<sub>A</sub>**

Algebra  
binaria

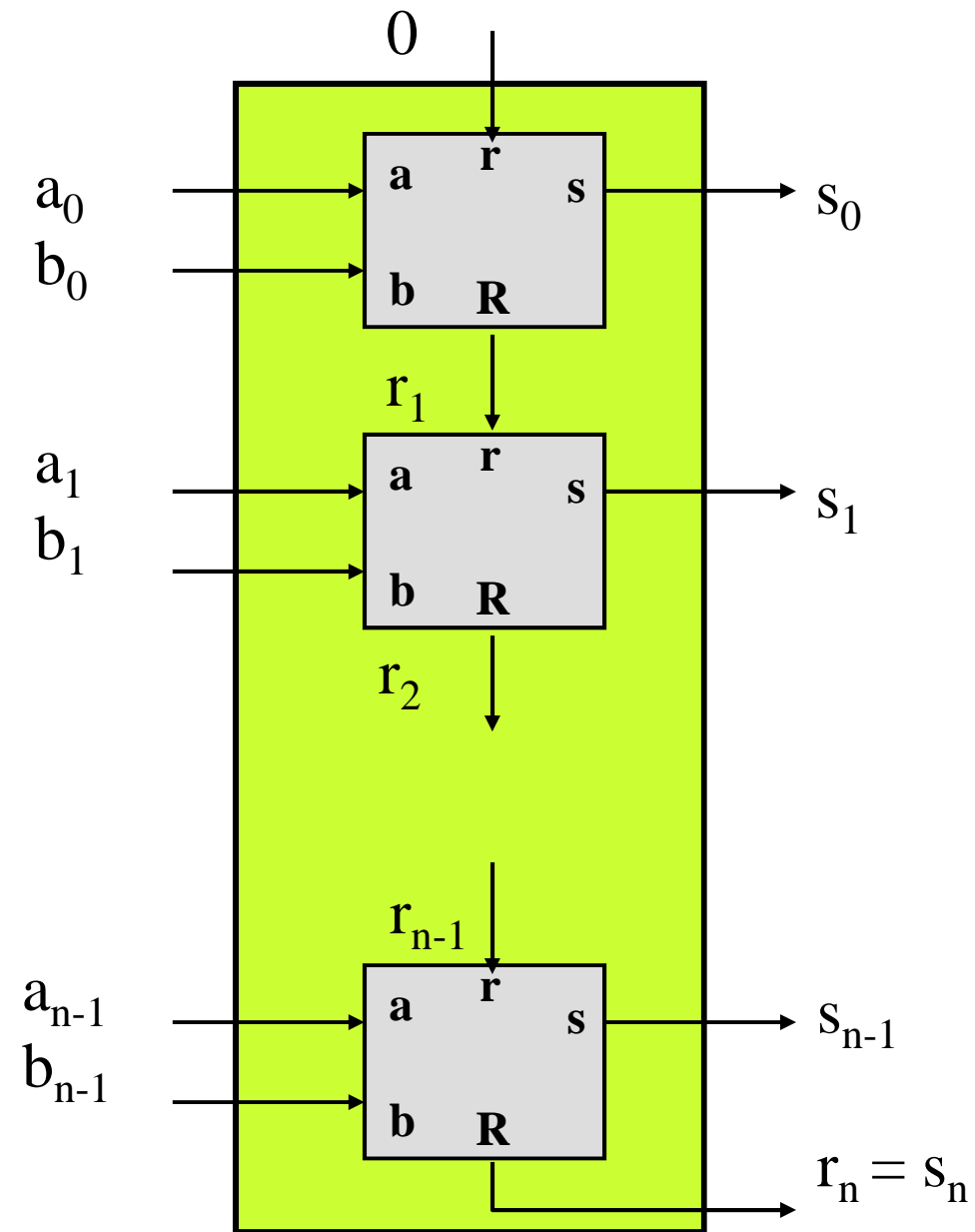


# Struttura: composizione e decomposizione

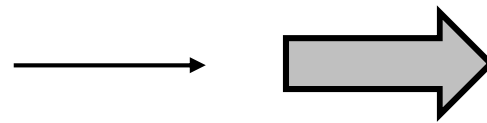
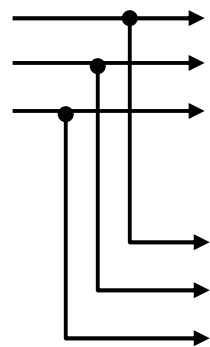
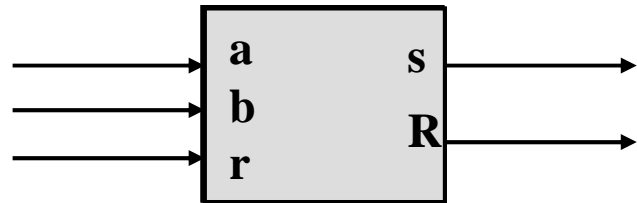
La composizione in serie e/o in parallelo di macchine combinatorie è ancora una macchina combinatoria

Ogni macchina combinatoria può essere decomposta fino ad individuare una disposizione in serie/parallelo di gate

# Composizione in serie di Full Adder



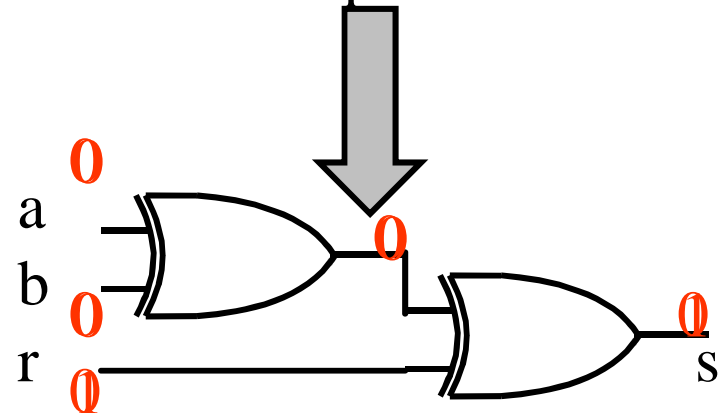
# Decomposizione di un Full Adder



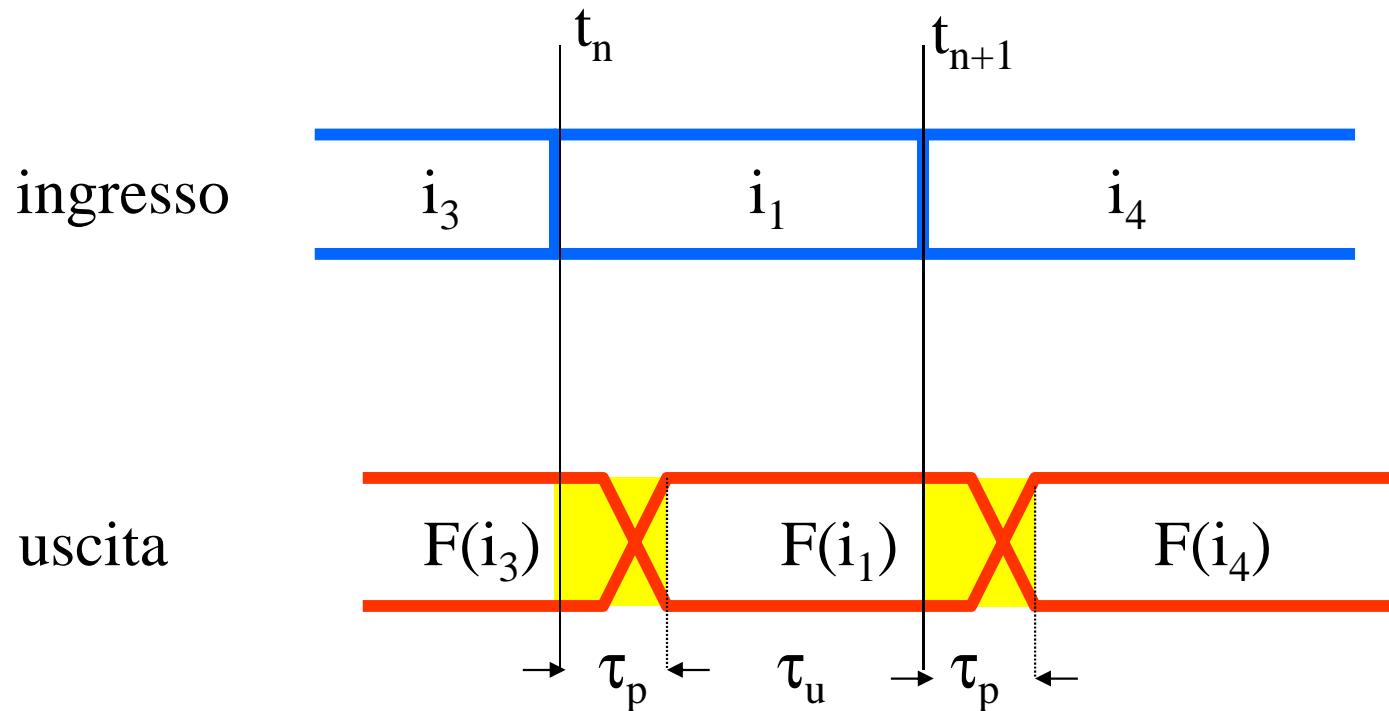
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$r_i$	$a_i$	$b_i$	$r_{i+1}$	$s_i$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

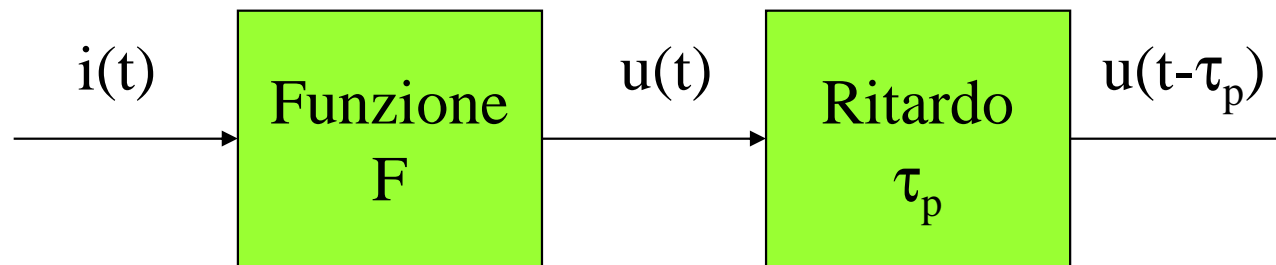
$s=1$  se e solo se in ingresso c'è un n° dispari di "uni"




# Macchina combinatoria “reale”: throughput



$\tau_p$  : tempo di calcolo della  $F$      $\tau_u$  : tempo di acquisizione del risultato



*throughput*:  $(\tau_p + \tau_u)$  o anche  $1/(\tau_p + \tau_u)$

A bright yellow starburst shape with a black outline, centered on the page. The starburst has multiple sharp points of varying lengths, creating a jagged, sunburst-like appearance.

**La macchina  
sequenziale**

# La FSM (Finite State Machine)

**Sistema matematico**

$$M = \{I, U, S, F, G\}$$

formato da 3 INSIEMI

**I:**  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  alfabeto di ingresso

**U:**  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  alfabeto di uscita

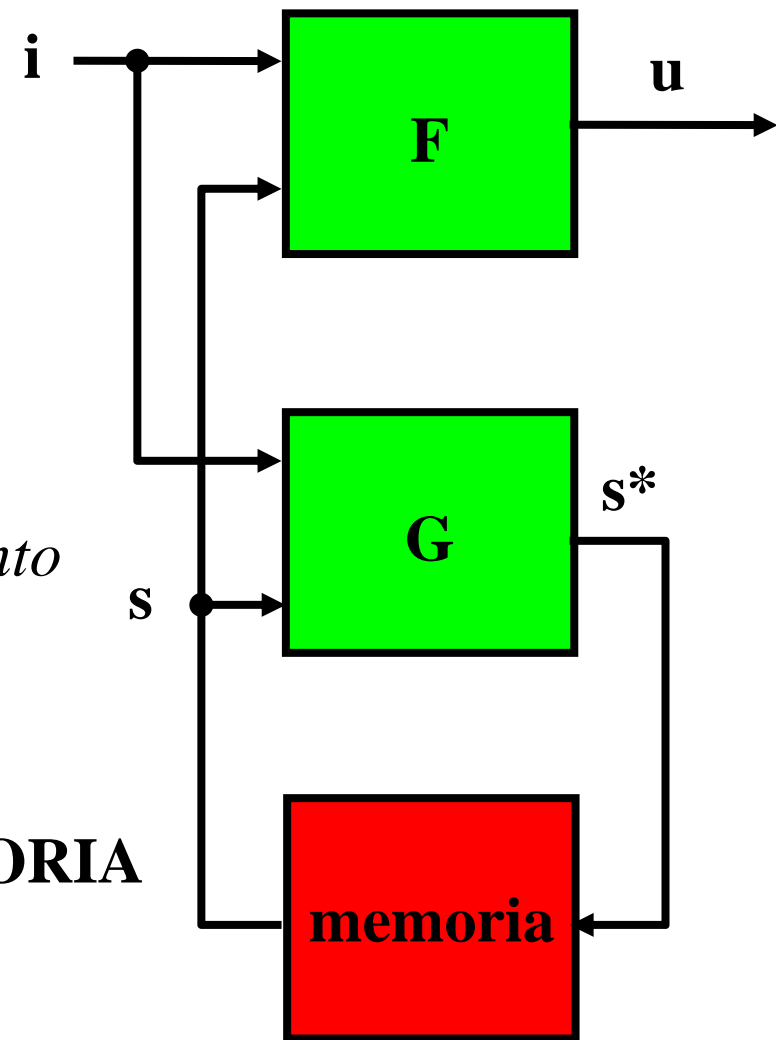
**S:**  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  insieme degli stati

e da 2 FUNZIONI

**F:**  $S \times I \rightarrow U$  funzione di uscita

**G:**  $S \times I \rightarrow S$  funzione di aggiornamento  
dello stato interno

**Nella realizzazione occorre una MEMORIA**  
che mantenga il “vecchio stato”  $s$   
fino a quando non è necessario  
sostituirlo con il “nuovo stato”  $s^*$



# Macchine asincrone e sincrone

**Macchina asincrona** - Lo stato e l'uscita possono cambiare solo se cambia l'ingresso.

La “durata” dell'ingresso non produce informazione.

Ogni stato diventa “stabile” per l'ingresso che lo ha causato

“ se  $s^* = G(s, i)$  allora anche  $s^* = G(s^*, i)$  ”

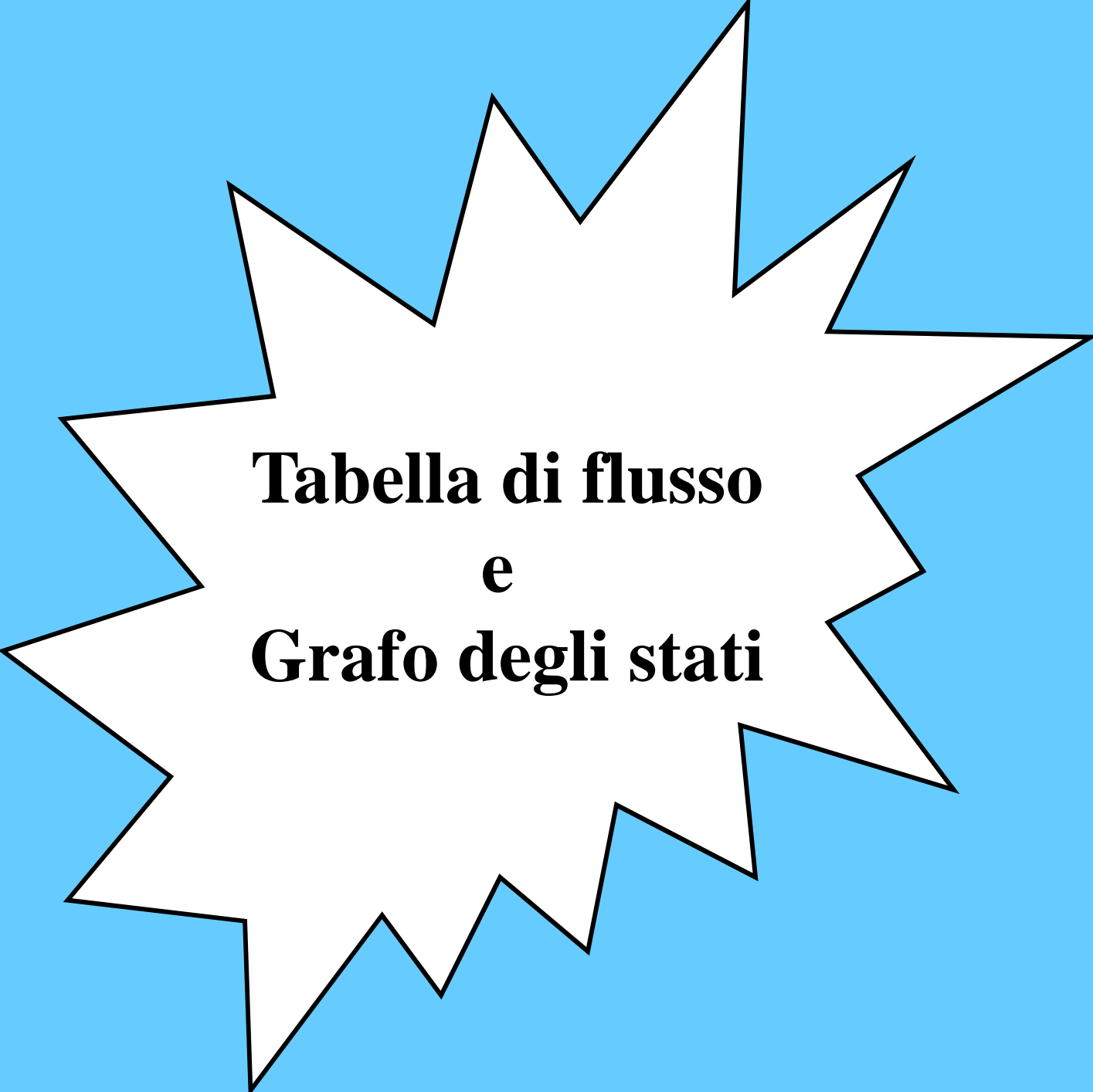
**Macchina sincrona** - Lo stato e l'uscita possono cambiare solo allo scadere di un prefissato intervallo di tempo  $T_0$  (*istanti di sincronismo*  $t = T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ ).

Ipotesi: durante ogni intervallo l'ingresso è costante

$$u^n = F(s^n, i^n)$$

$$s^{n+1} = s^{*n} = G(s^n, i^n)$$

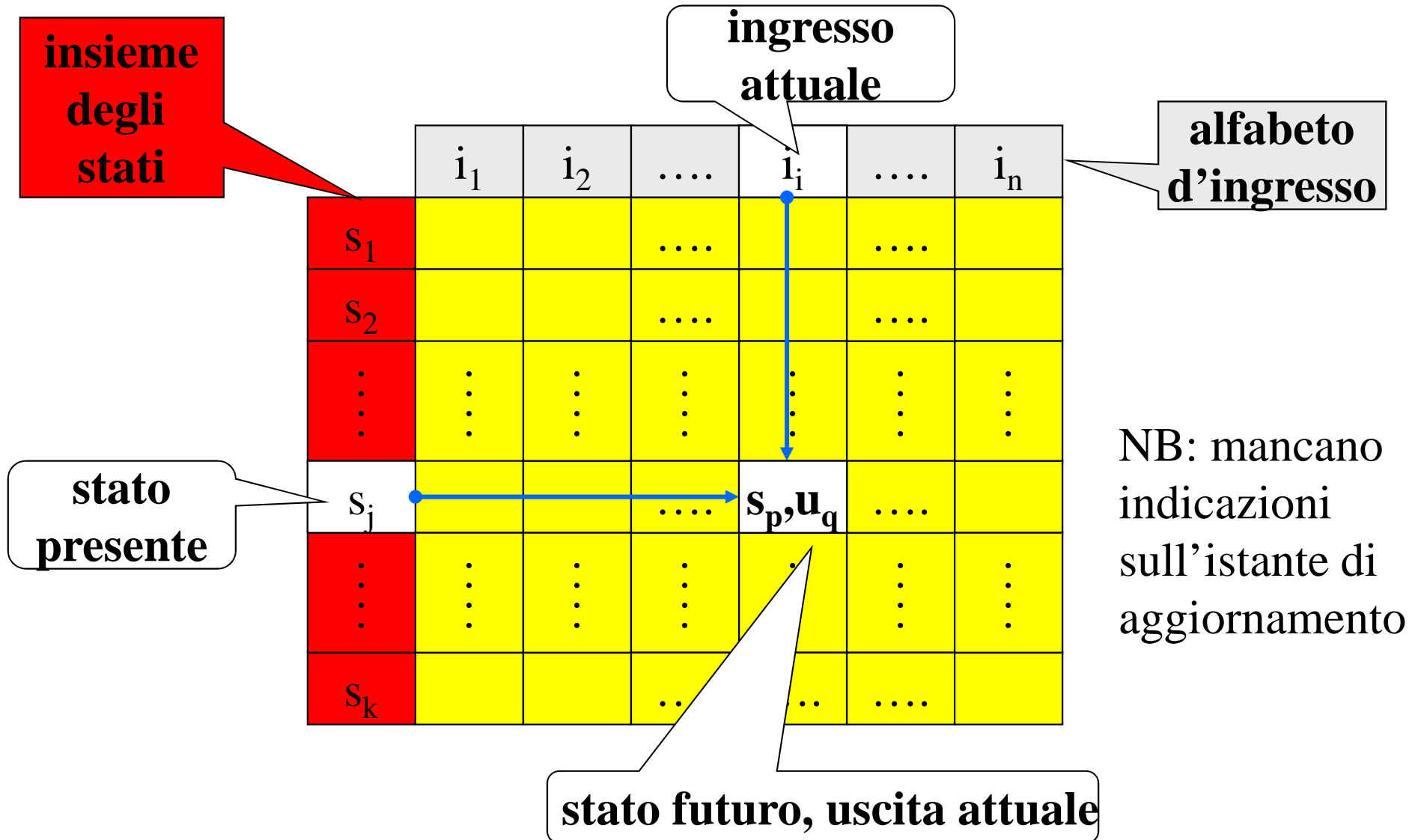
L'intervallo compreso tra due successivi istanti di sincronismo è l'unità di misura del tempo.



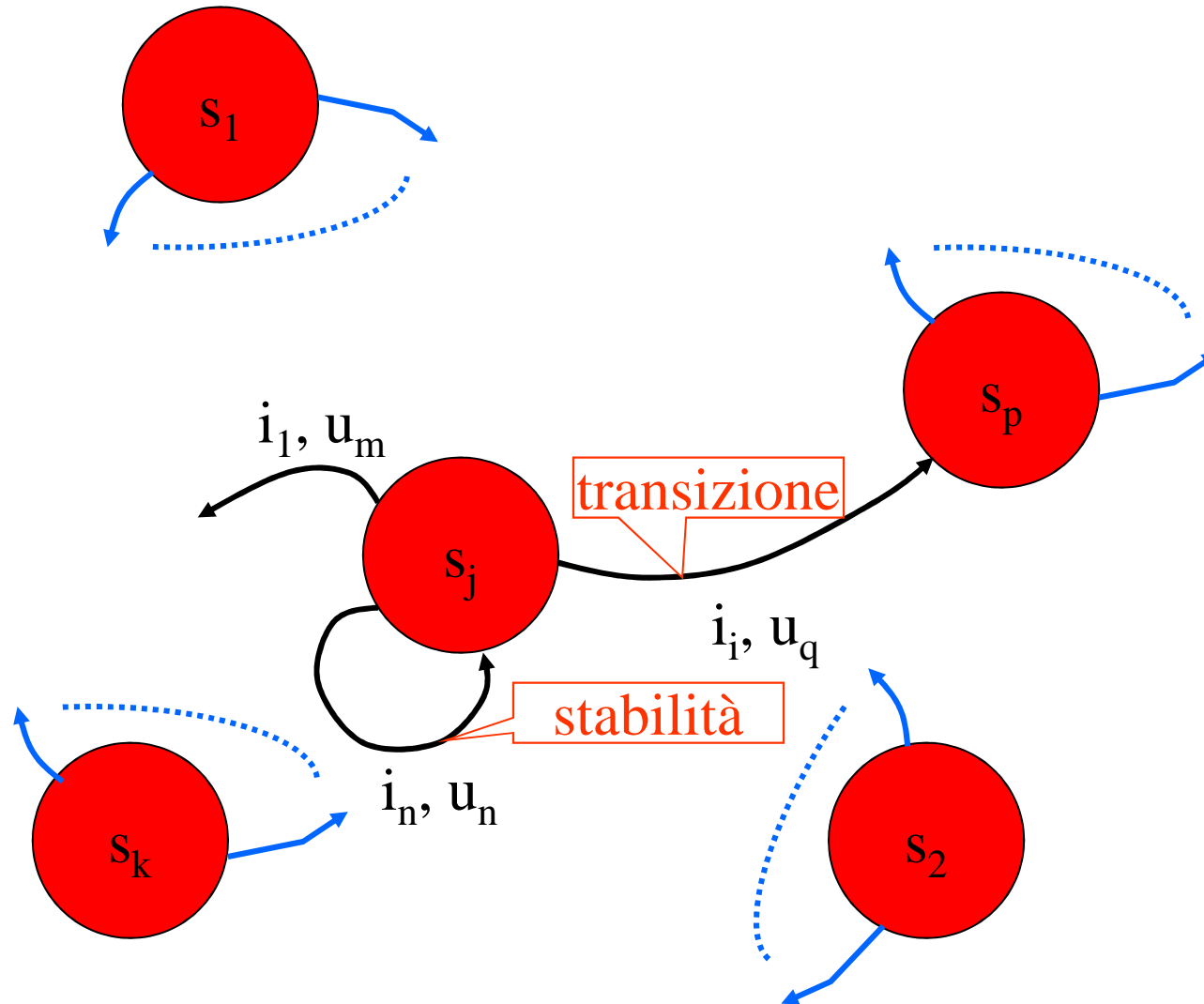
**Tabella di flusso  
e  
Grafo degli stati**



# Descrizione con tabella di flusso

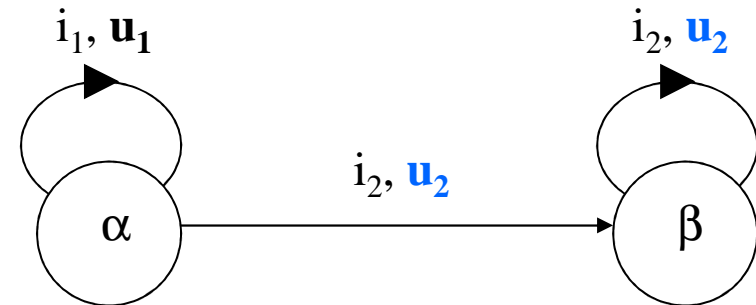


# Descrizione con grafo degli stati

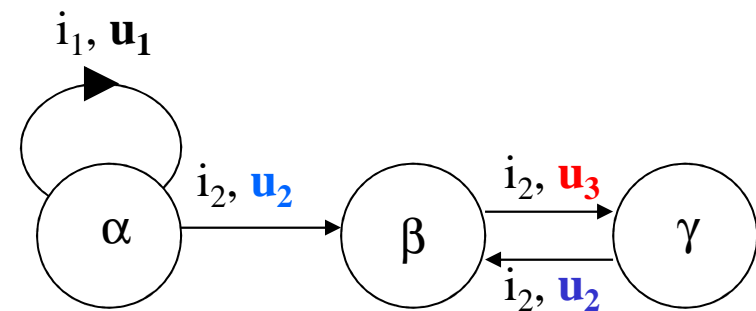
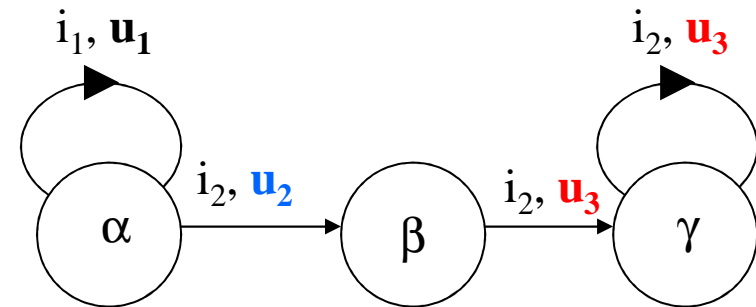


# Grafo di comportamenti asincroni e sincroni

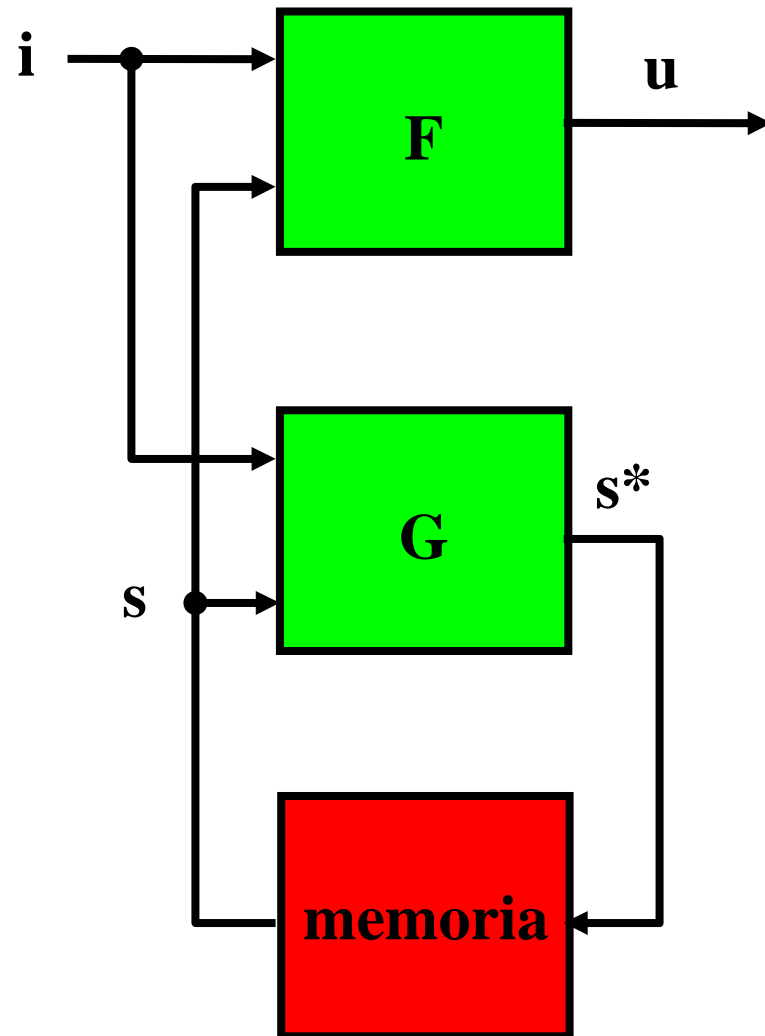
**Macchina asincrona: ogni nuovo ingresso produce subito una stabilità e genera quindi un solo nuovo simbolo d'uscita**



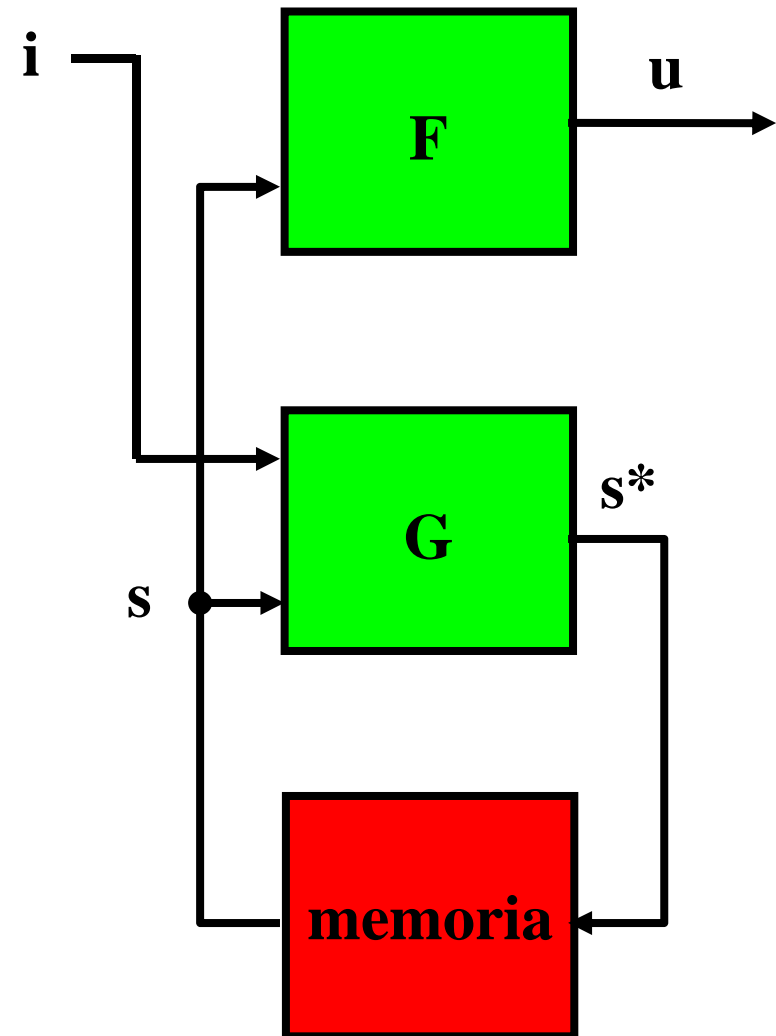
**Macchina sincrona: un nuovo ingresso produce una sequenza, finita o periodica, di transizioni di stato e di simboli d'uscita**



# 1: Automa di Mealy e Automa di Moore



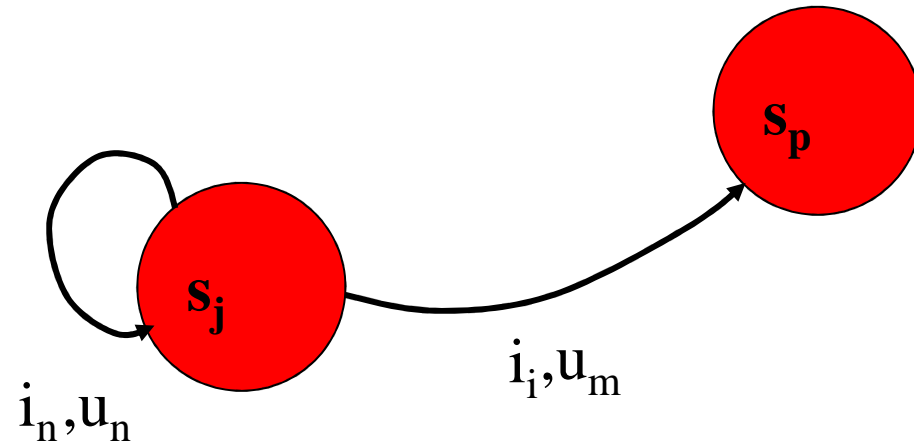
**Mealy**  
 $F : S \times I \rightarrow U$



**Moore**  
 $F : S \rightarrow U$

# Automa di Mealy e automa di Moore

**GRAFO:**  
 simbolo d'uscita  
 all'interno del nodo



**TABELLA:**  
 ulteriore colonna  
 per specificare  
 la  $F : S \rightarrow U$

	$i_1$	$i_2$	....	$i_i$	....	$i_n$	F
$s_1$	•	•	•	•	•	•	•
$s_2$	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
$s_j$	•	•	•	•	•	•	•
$s_k$	•	•	•	•	•	•	•

The table is annotated with callouts:
 

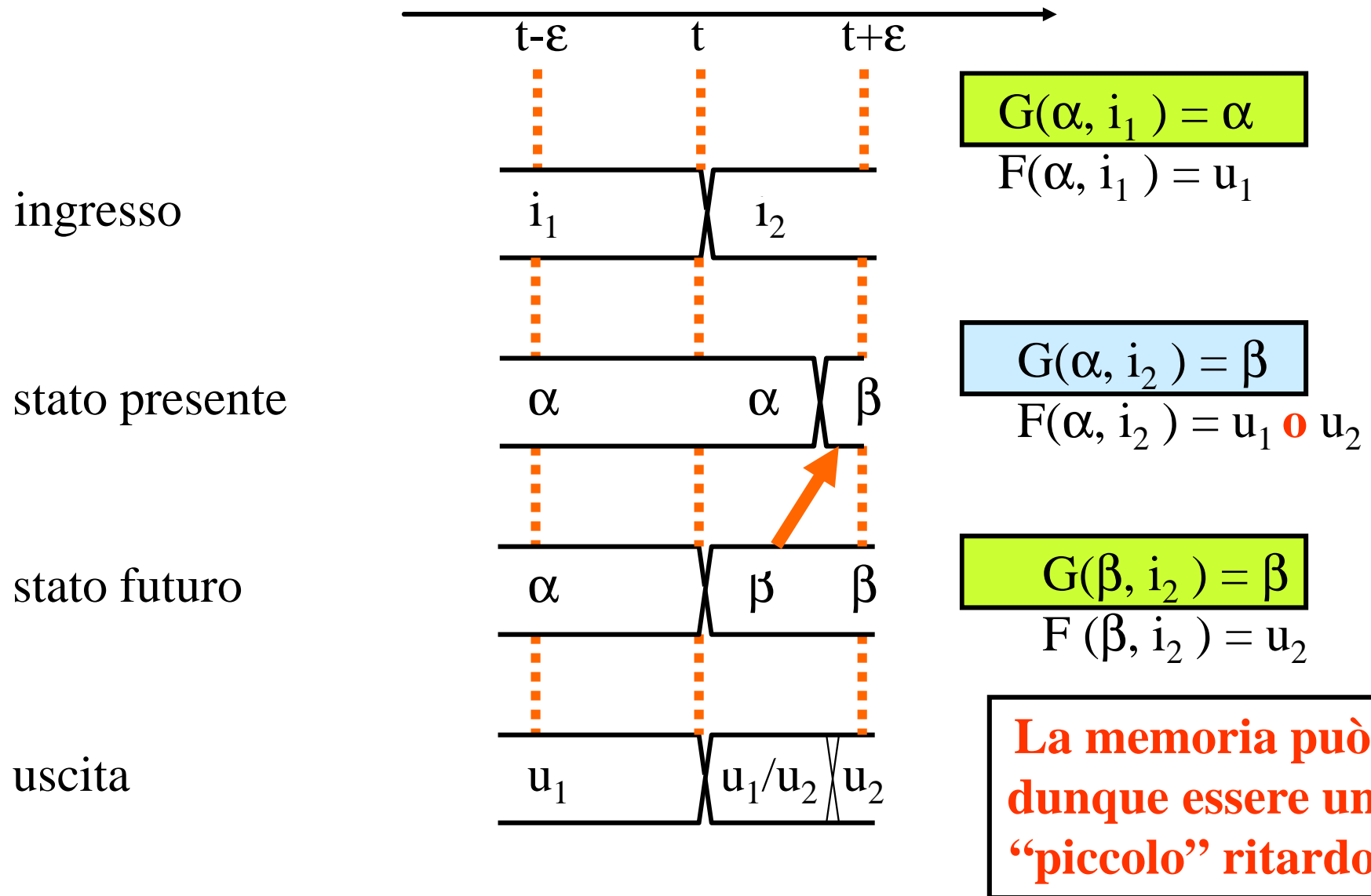
- ingresso attuale**: points to the input  $i_i$  in the header row.
- stato presente**: points to the state  $s_j$  in the left column.
- stato futuro**: points to the state  $s_p$  in the cell corresponding to input  $i_i$  and state  $s_j$ .
- uscita attuale**: points to the output  $u_m$  in the cell corresponding to input  $i_i$  and state  $s_j$ .



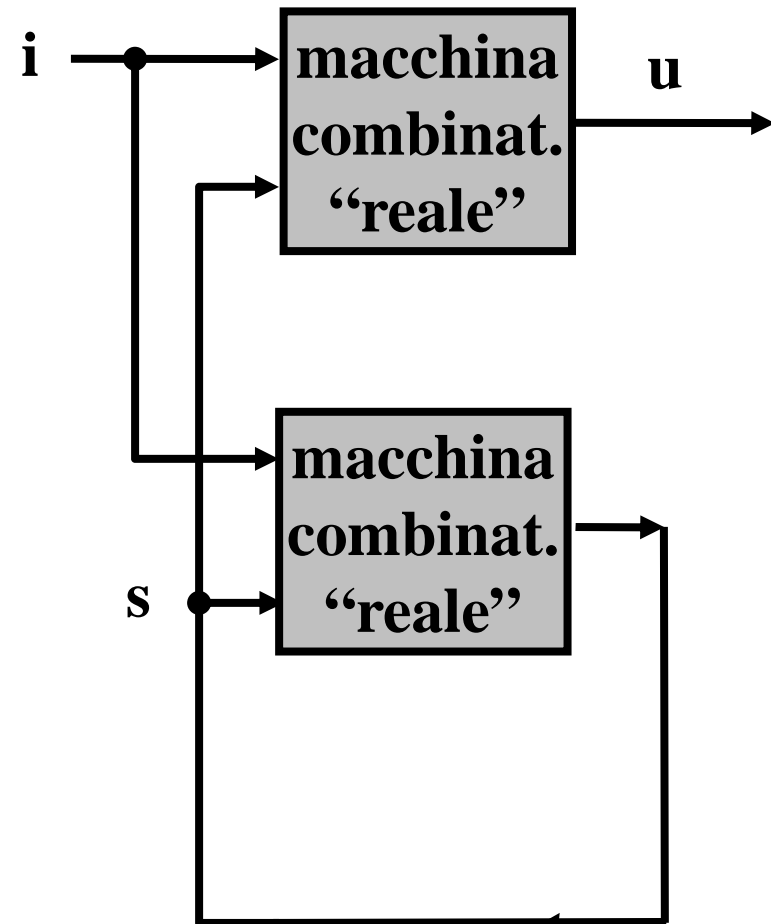
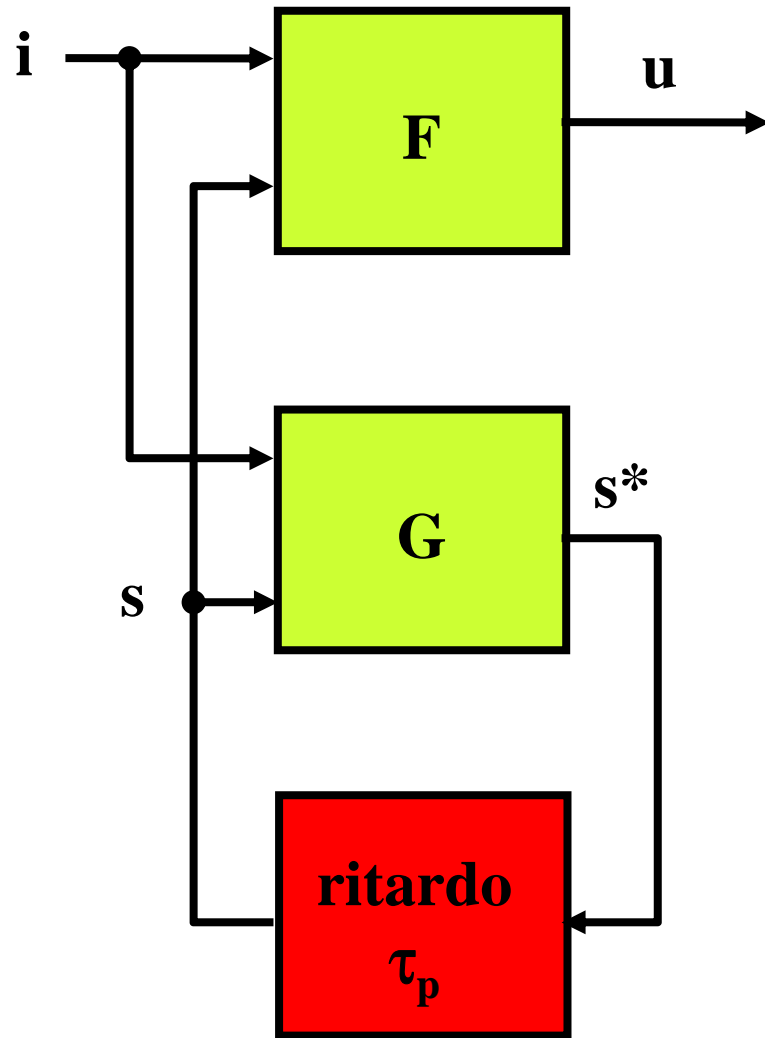
**3.2**

**La macchina  
asincrona**

# La macchina asincrona (comportamento)



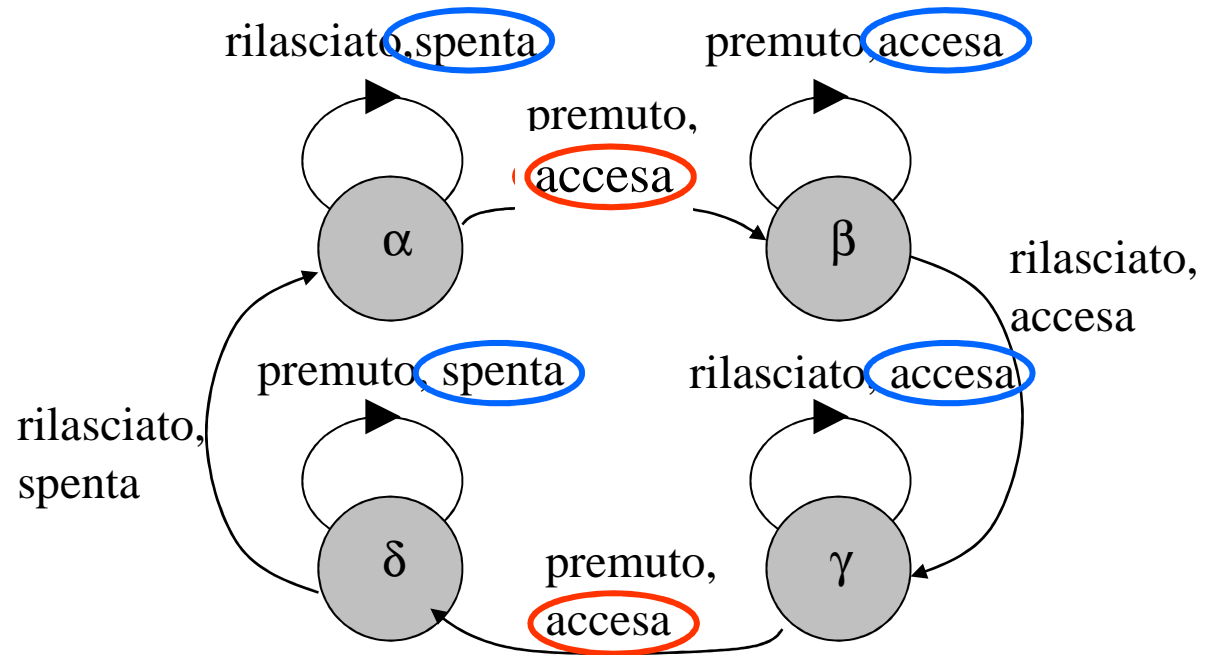
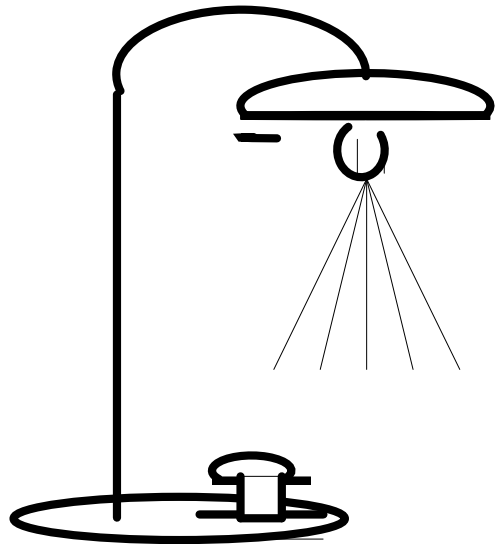
# La macchina asincrona (struttura)



**retroazione  
diretta**



# Esempi: la lampada da tavolo

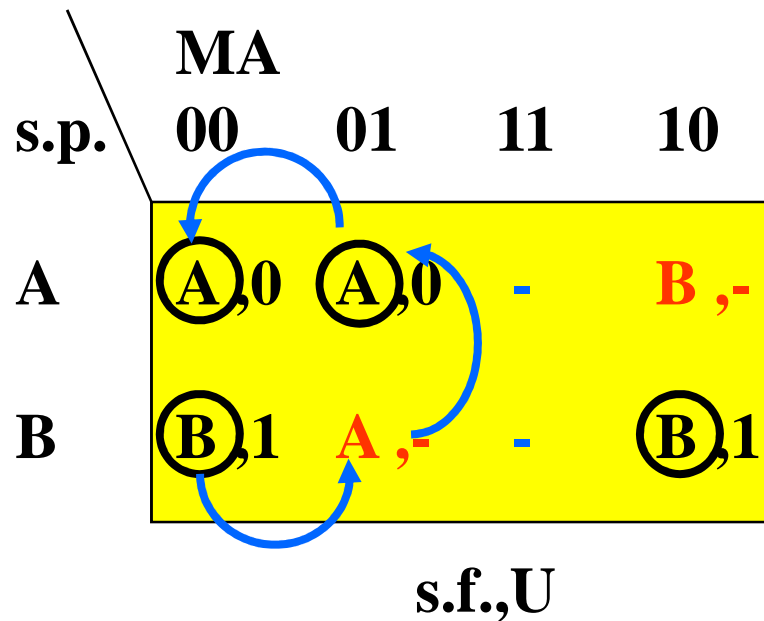
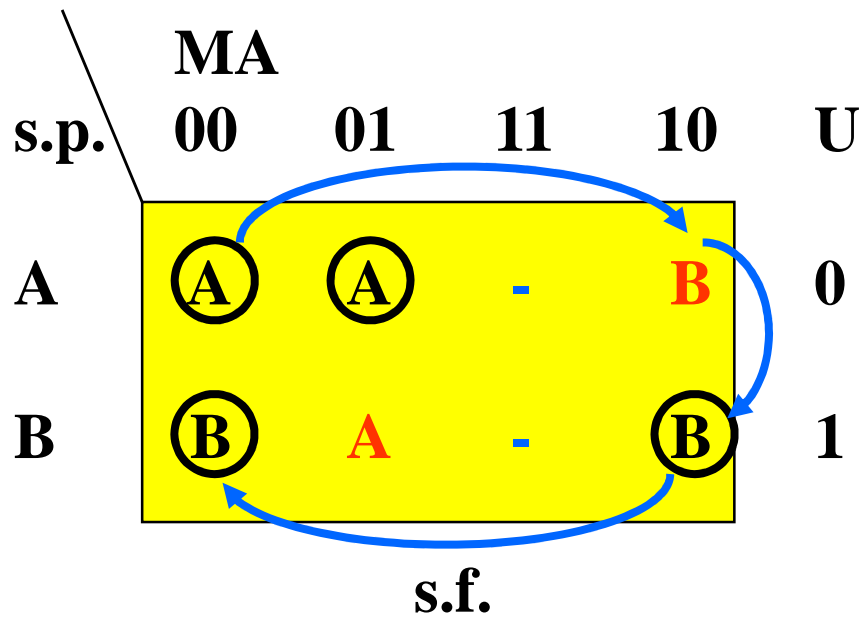
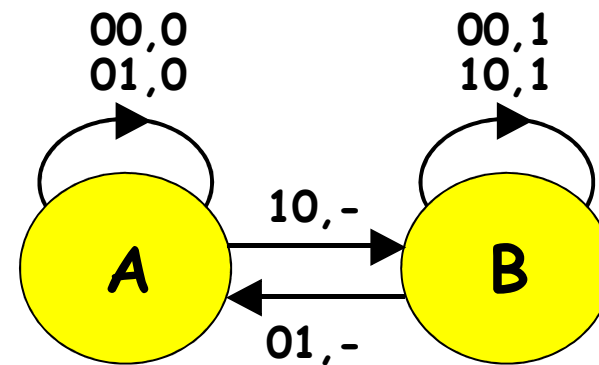
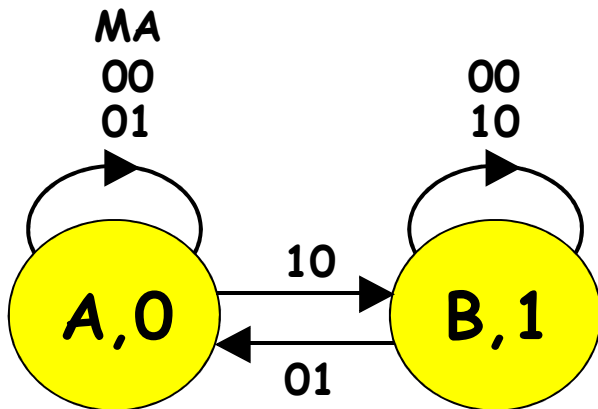
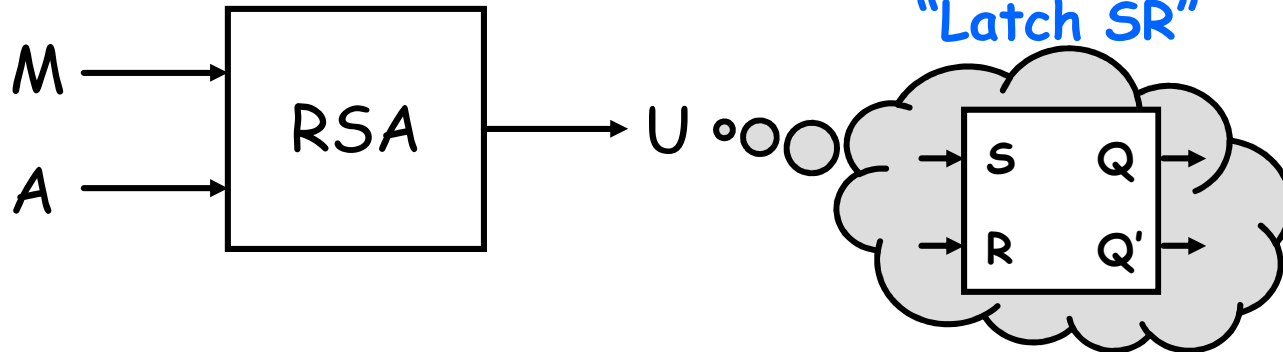


pulsante  $i \in I: \{\text{rilasciato}, \text{premuto}\}$   
 lampadina  $u \in U: \{\text{spenta}, \text{accesa}\}$

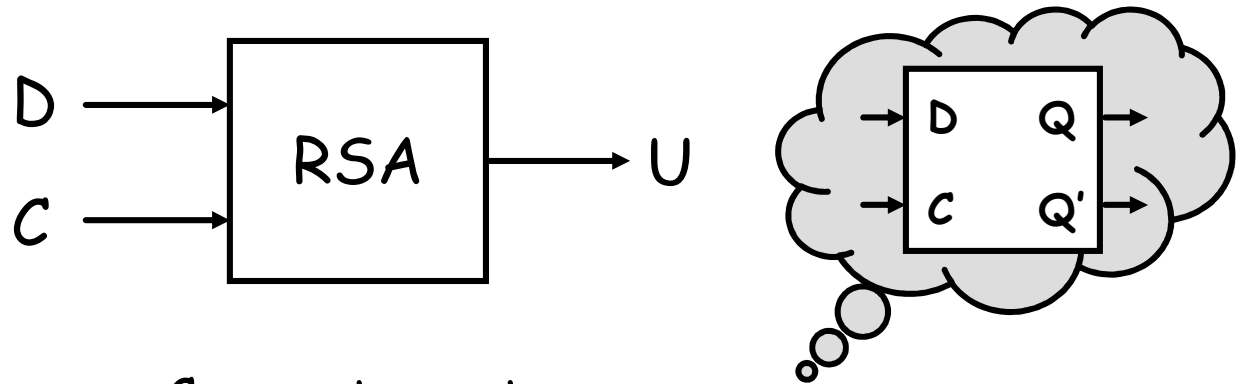
**N.B: durata di una transizione uscita durante una transizione**

	rilasciato	premuto
$\alpha$	$\alpha$ , spenta	$\beta$ , <b>accesa</b>
$\beta$	$\gamma$ , accesa	$\beta$ , accesa
$\gamma$	$\gamma$ , accesa	$\delta$ , accesa
$\delta$	$\alpha$ , spenta	$\delta$ , spenta

# Relè con autoritenuta



# D-latch



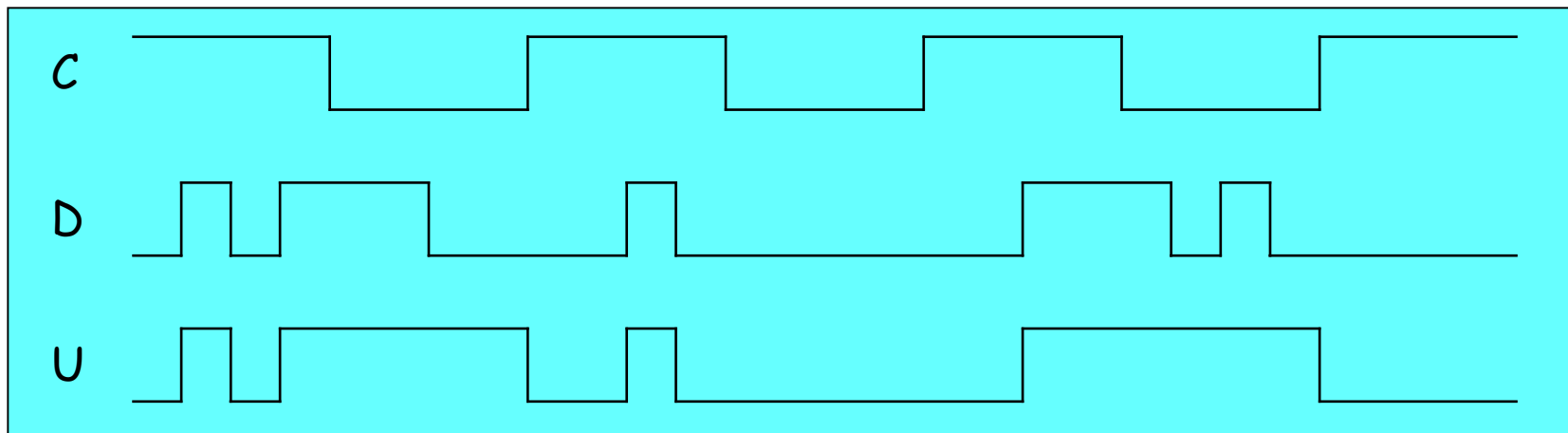
Comportamento:

*C* svolge il ruolo di segnale di campionamento, *D* di segnale campionato.

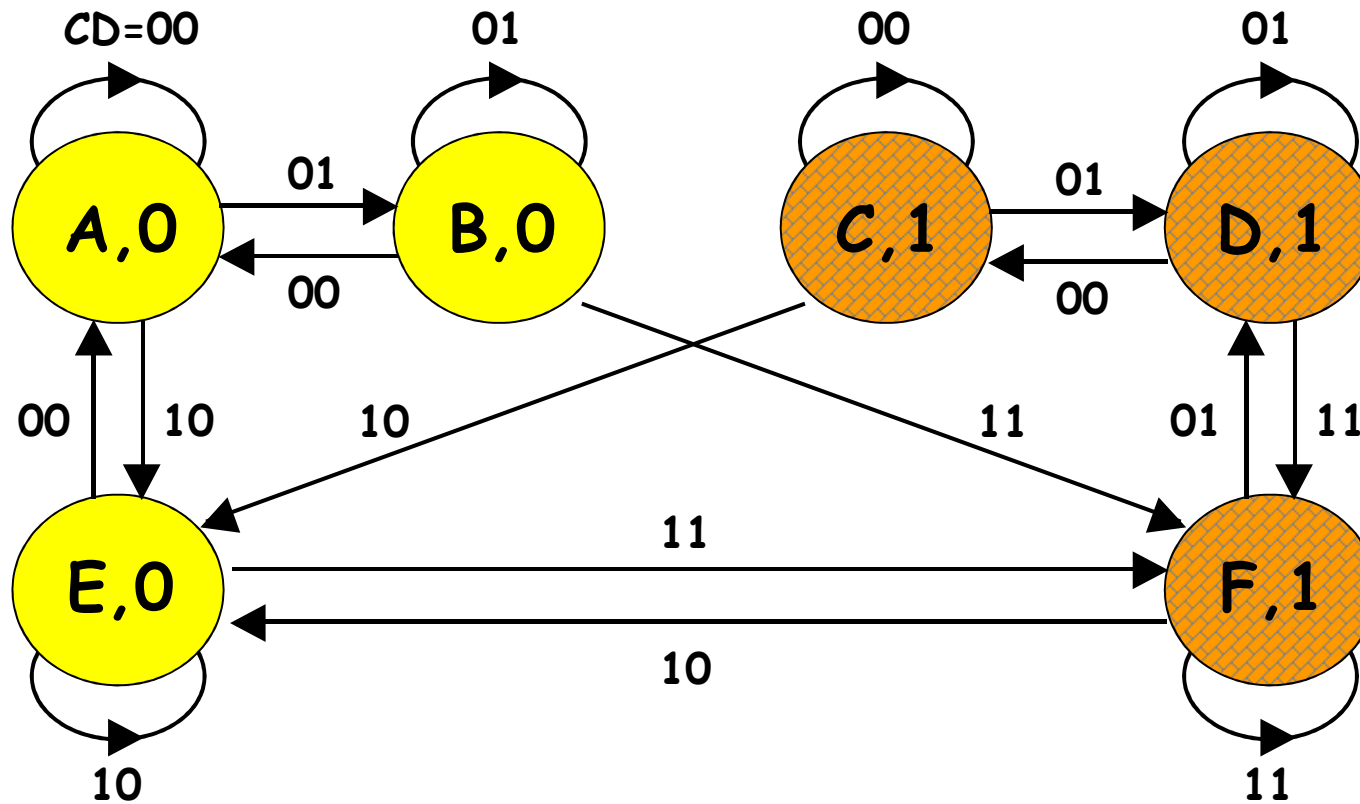
Il campionamento ha luogo allorché  $C=1$ .

*U* riflette l'ultimo valore campionato.

(I segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente.)

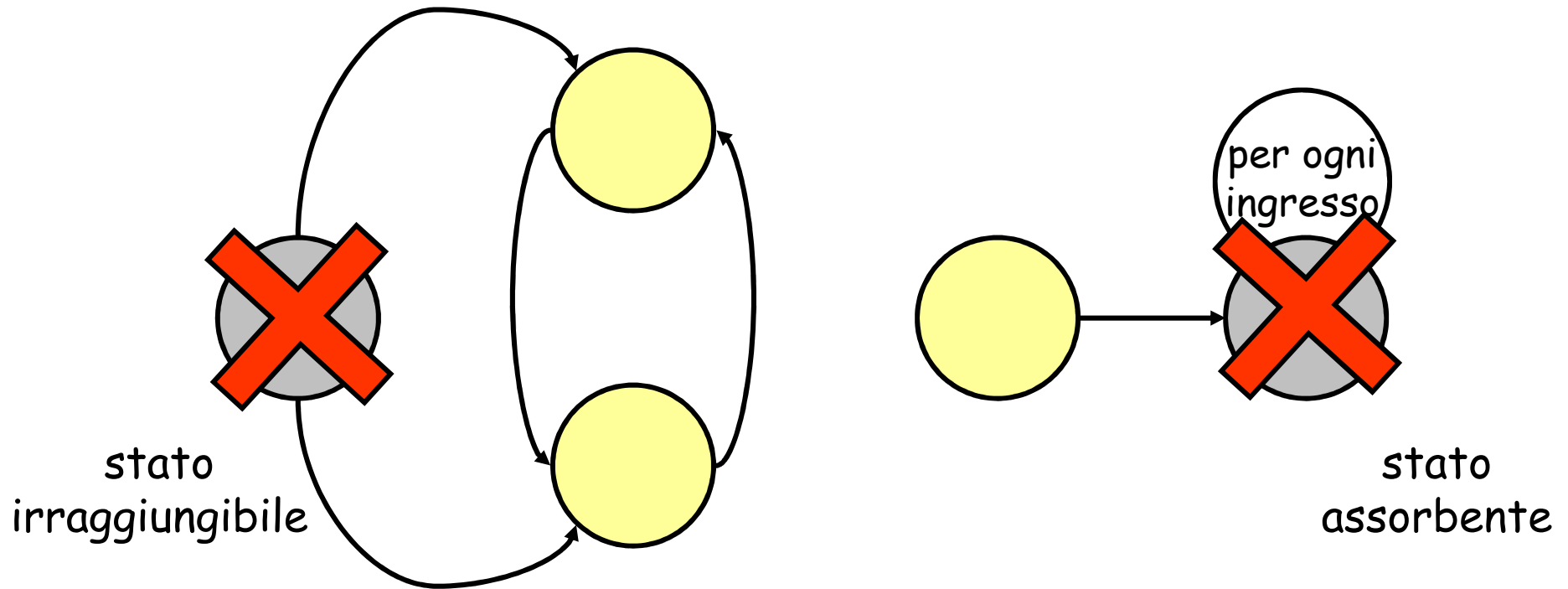


# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)



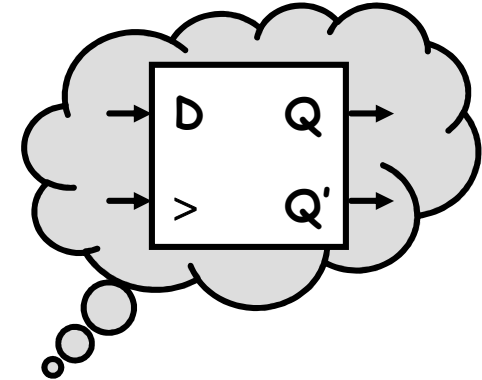
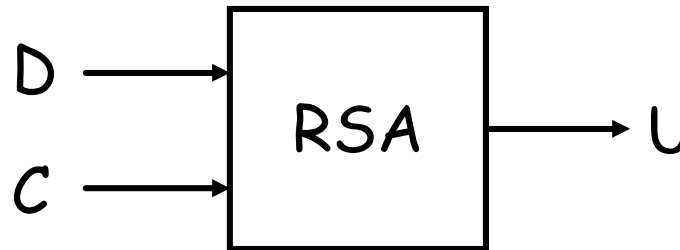
# Grafi strettamente connessi

Macchine che non si fermano mai  
Stato iniziale qualsiasi



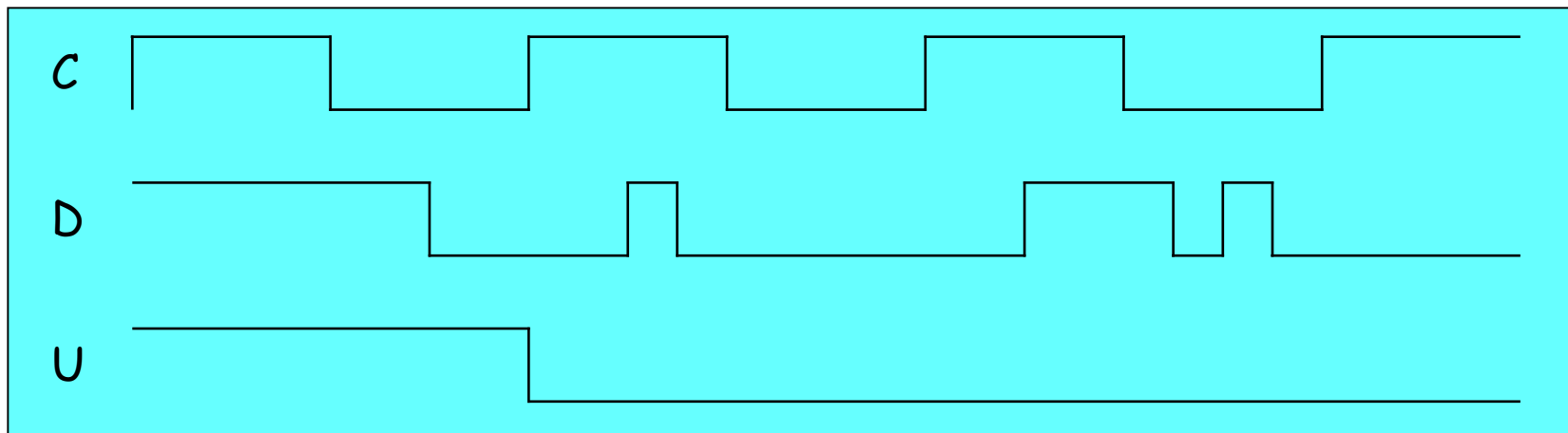
Deve esistere almeno una sequenza d'ingresso che consenta di passare da uno stato arbitrariamente scelto ad un altro stato arbitrariamente scelto

# Flip-Flop D

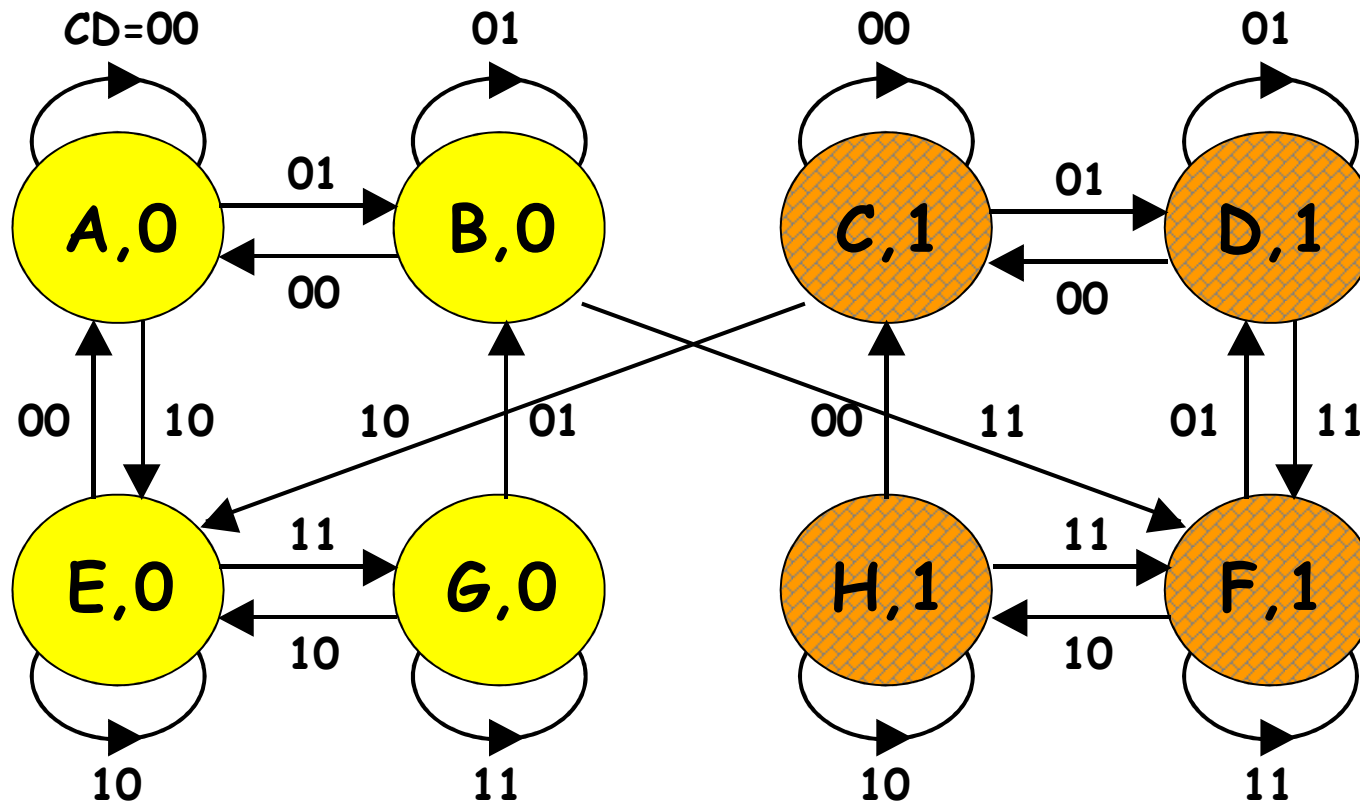


Comportamento:

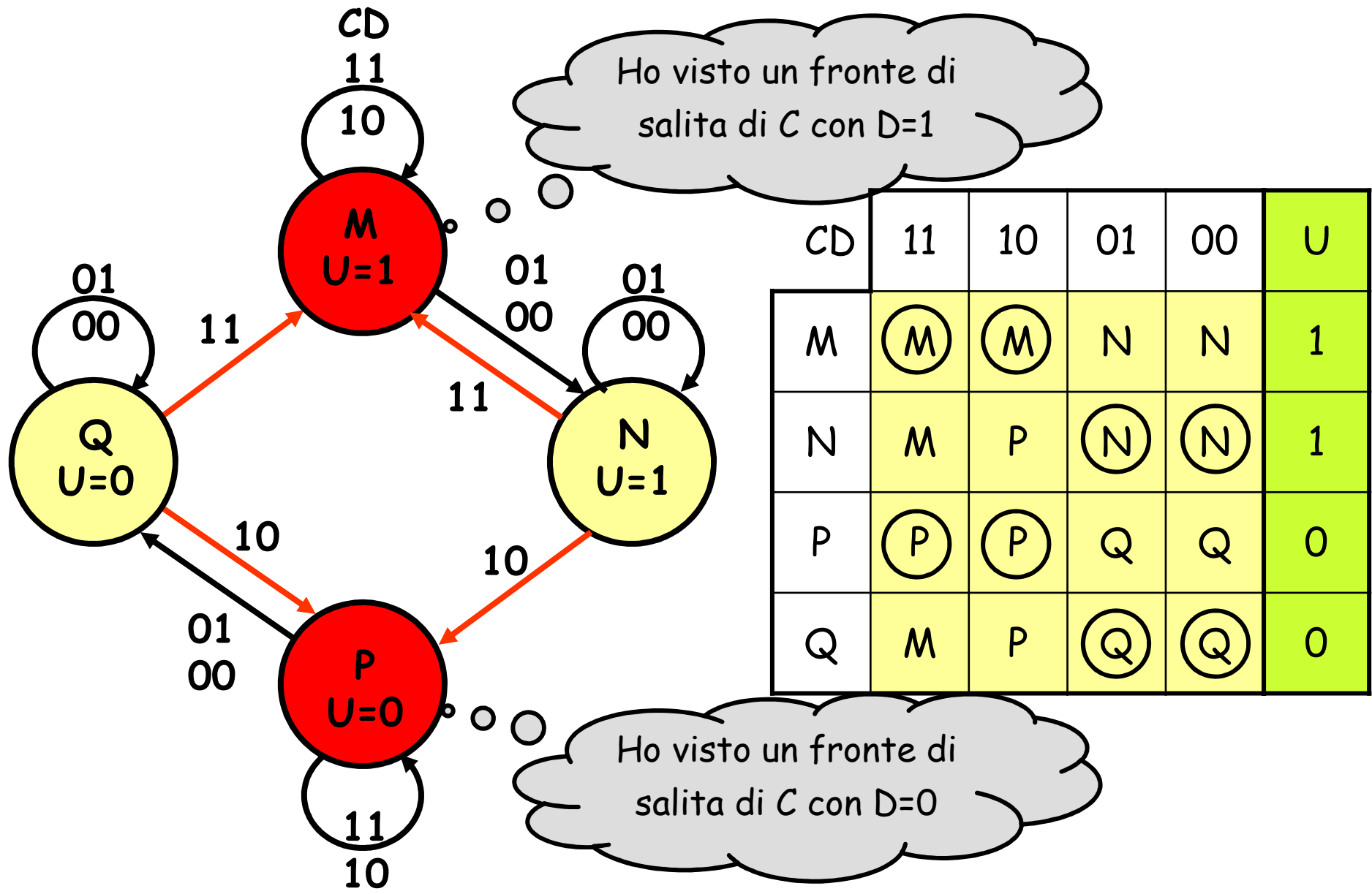
*C* svolge il ruolo di segnale di campionamento, *D* di segnale campionato.  
Il campionamento ha luogo allorché *C* transita dal valore logico 0 al valore logico 1. *U* riflette l'ultimo valore campionato.  
(I segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente.)



# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)



# Grafo degli stati non primitivo (modello di Moore)



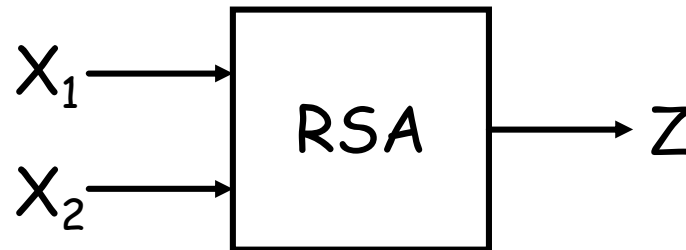


# Stati indistinguibili e Automi equivalenti

La descrizione con un automa di un comportamento sequenziale **non è unica**

- **Stati indistinguibili:** due o più stati a partire dai quali, per ogni possibile sequenza d'ingresso, si ottengono **sequenze d'uscita identiche**
- **Automi equivalenti:** automi che descrivono lo stesso comportamento con **differente numero di stati interni**
- **Automa minimo:** automa i cui stati interni sono tutti tra loro **distinguibili**

# Sincronizzazione di segnali



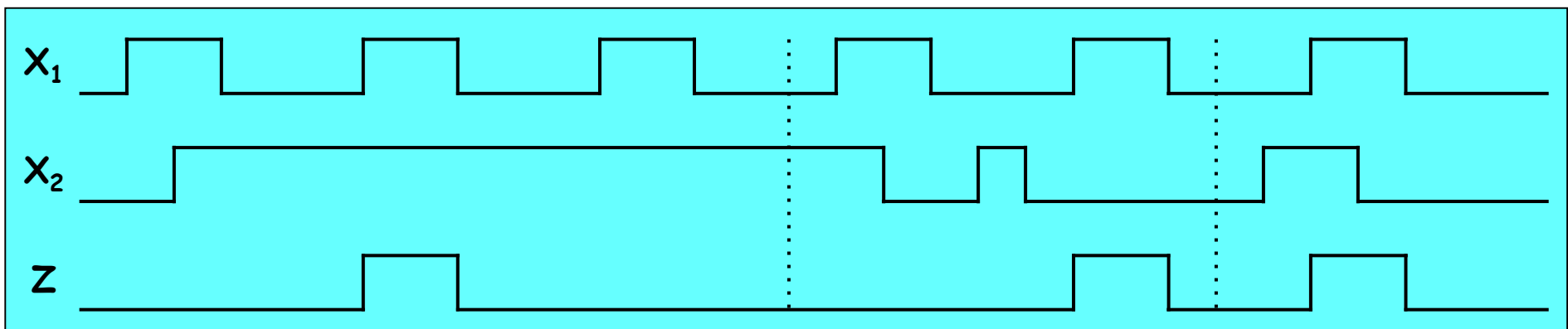
Comportamento:

$X_1$ : segnale periodico (periodo  $T$ ,  $t_{on} = \tau$ );

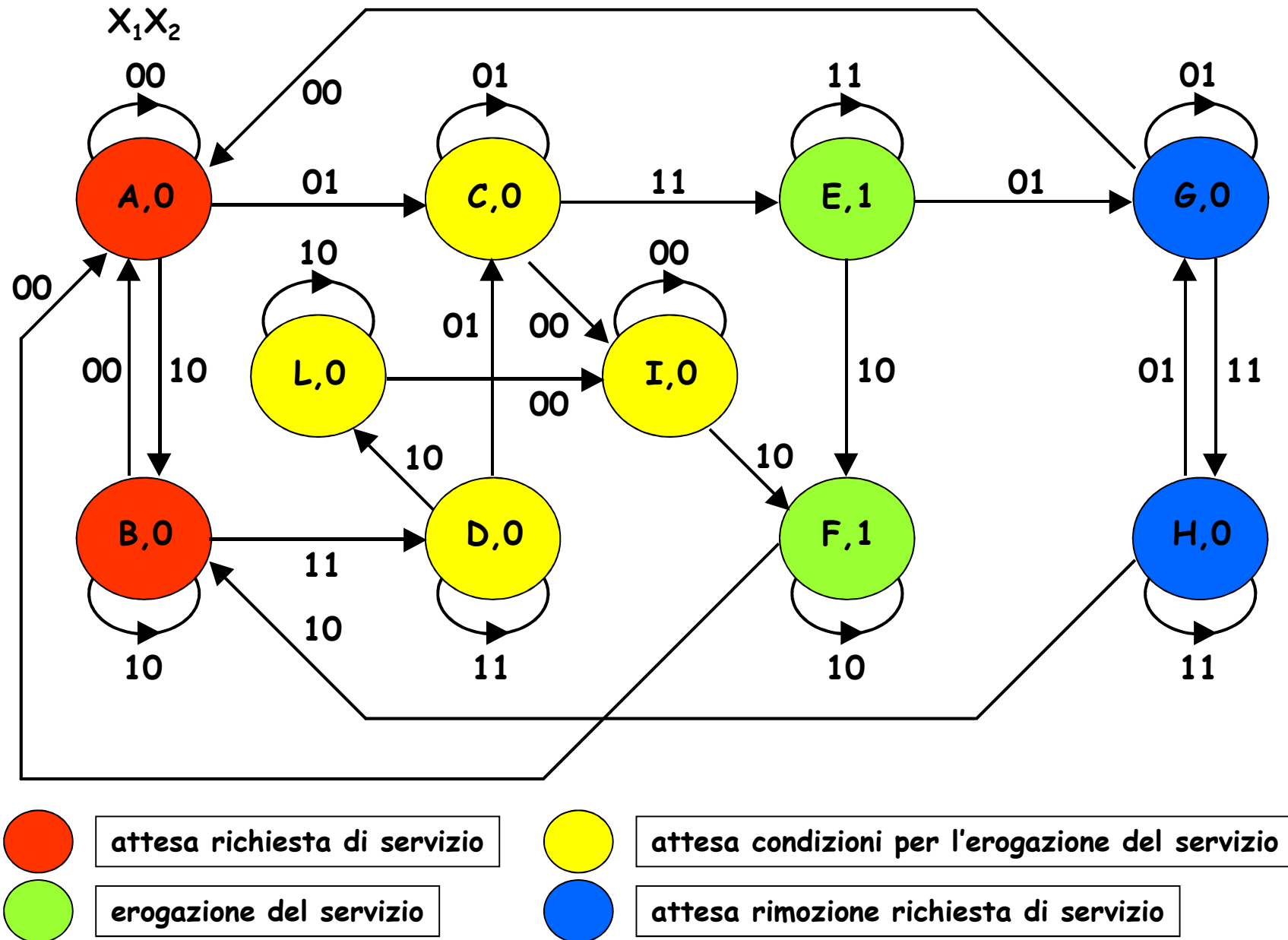
$X_2$ : segnale con andamento qualsiasi, ma con frequenza  $f(X_2) \ll f(X_1)$ ;

$Z = 1$  per un tempo pari a  $\tau$  ad ogni attivazione di  $X_2$ .

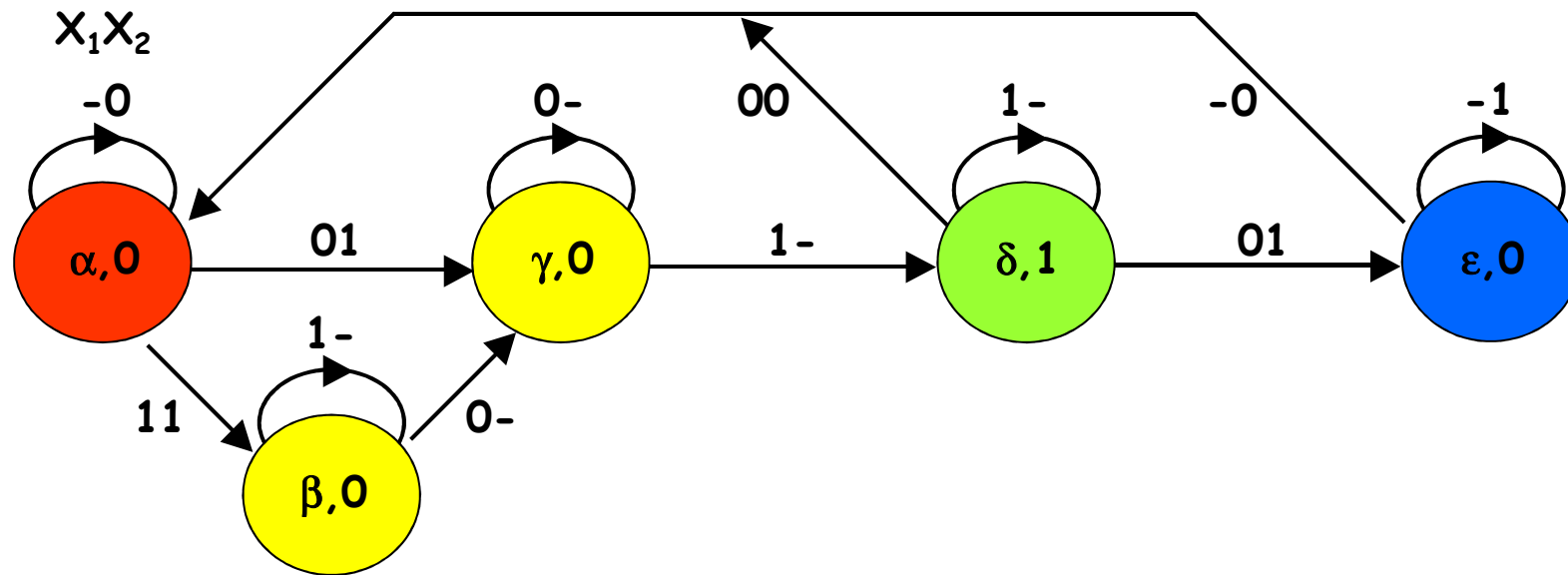
(I segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente.)

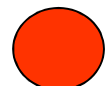
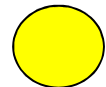




# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)

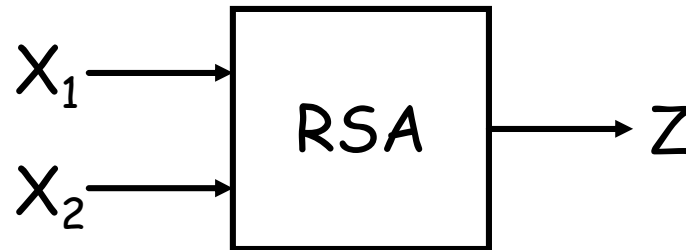


# Automa minimo (modello di Moore)



-  attesa richiesta di servizio
-  attesa condizioni per l'erogazione del servizio
-  erogazione del servizio
-  attesa rimozione richiesta di servizio

# Riconoscimento di sequenze

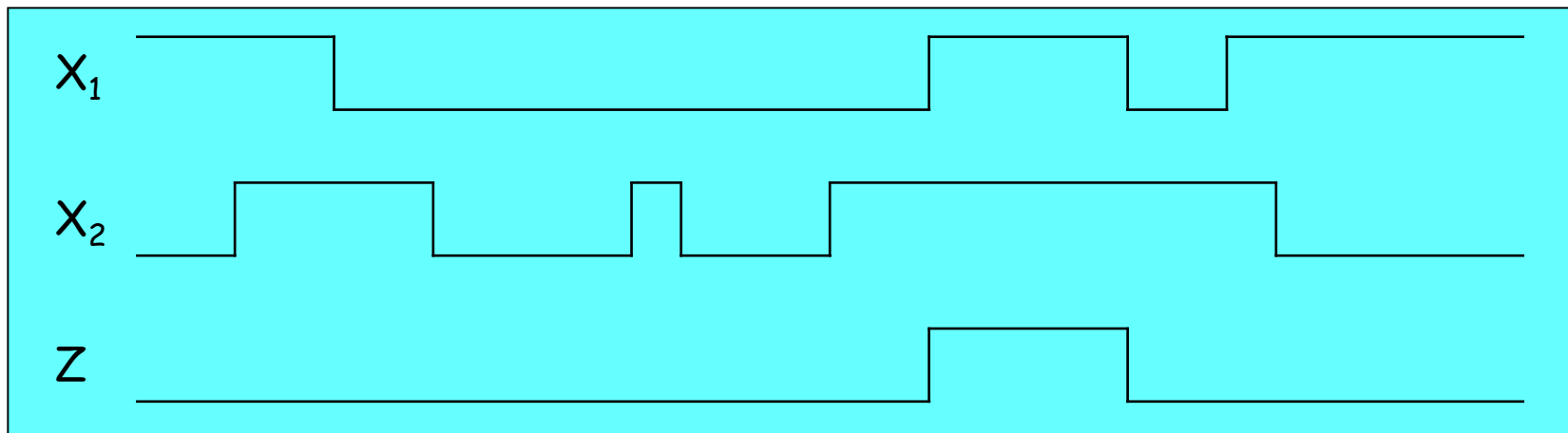


Comportamento:

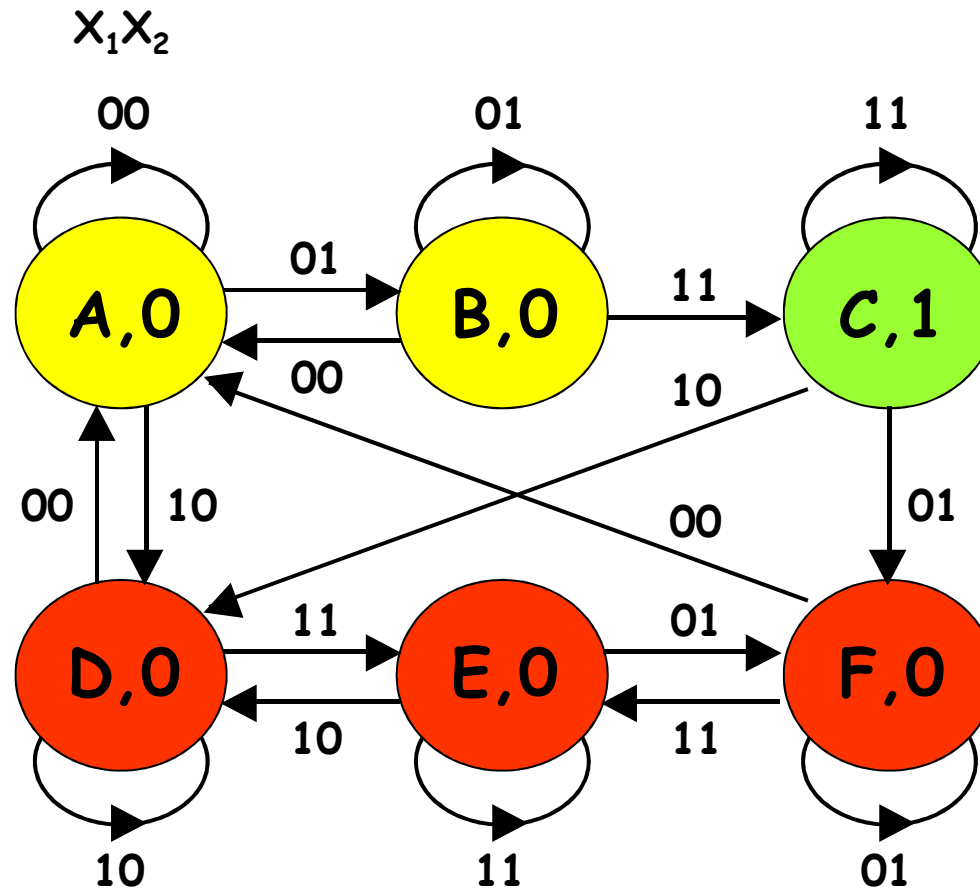
$Z = 1$  in corrispondenza dell'ultimo simbolo della sequenza di ingresso

$X_1X_2 = 00-01-11.$

(I segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente.)



# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)



6 stati

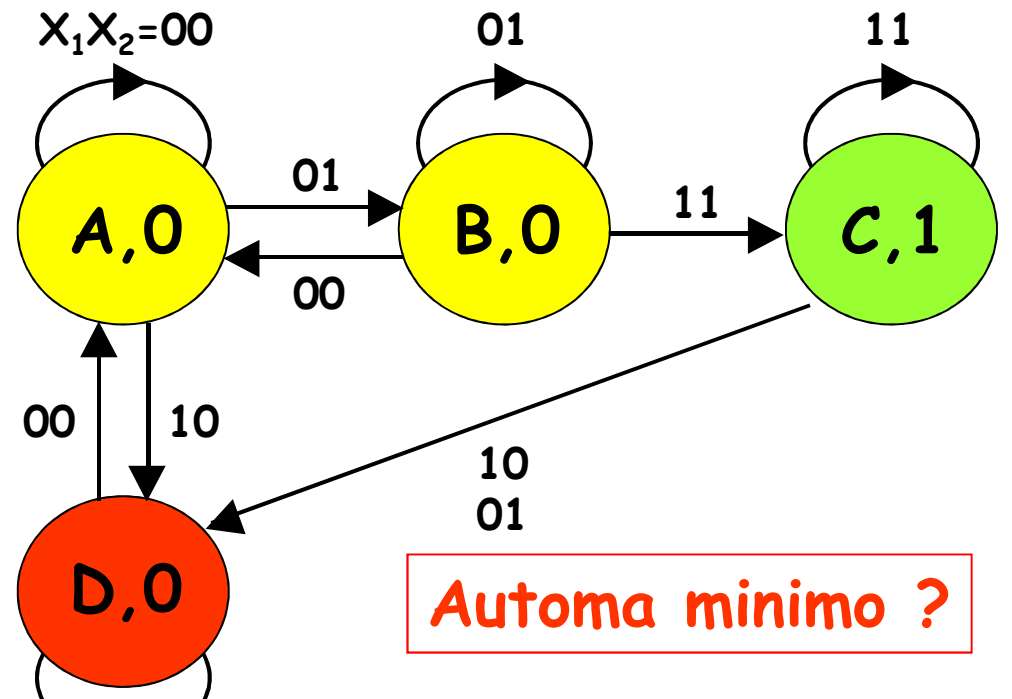
# Grafo degli stati non primitivo

4 stati

## Tabella di flusso (modello di Mealy)

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	A	<b>A,0</b>	B,0	-, -	D,0
	B	A,0	<b>B,0</b>	C,-	-, -
	C	-, -	D,-	<b>C,1</b>	D,-
	D	A,0	<b>D,0</b>	<b>D,0</b>	<b>D,0</b>

s.f., Z



Automa minimo ?

## Tabella di flusso minima (3 stati)

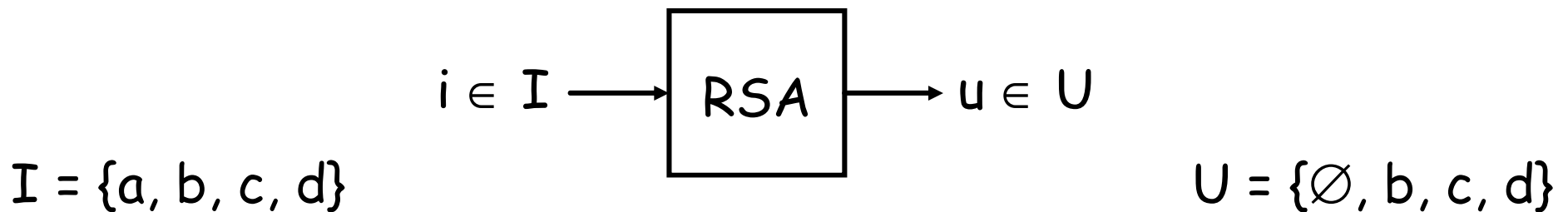
		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	B	<b>B,0</b>	<b>B,0</b>	C,-	D,0
	C	-, -	D,-	<b>C,1</b>	D,-
	D	<b>B,0</b>	<b>D,0</b>	<b>D,0</b>	<b>D,0</b>

s.f., Z

Di norma, Z = - durante le transizioni di stato che ne comportano la variazione

# Mealy vs. Moore

L'automa di Mealy coinvolge in generale un numero di stati inferiore rispetto all'automa di Moore:  
 diagramma degli stati → modello di Moore  
 tabella di flusso → modello di Mealy



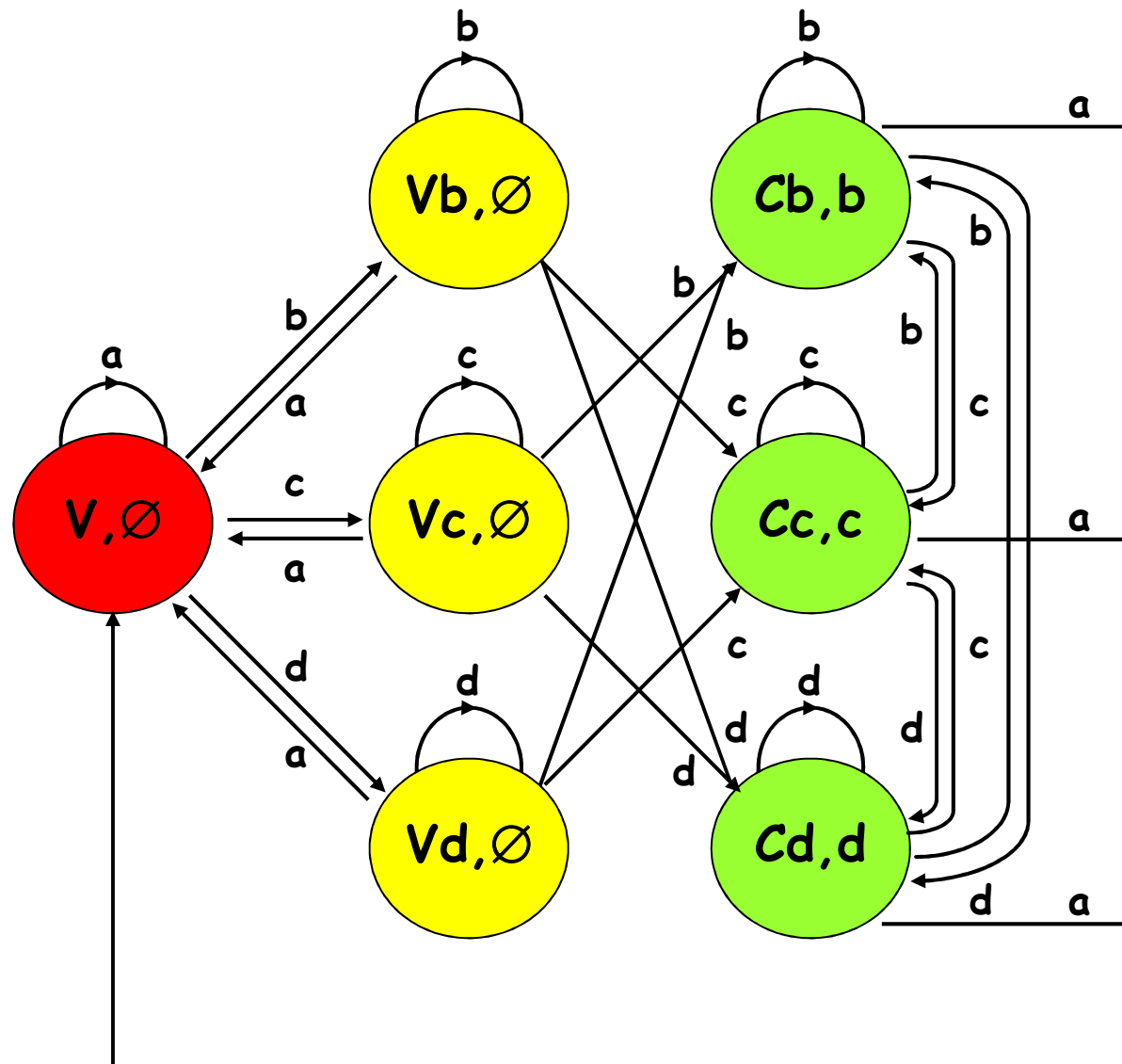
Comportamento:

il simbolo di uscita "u" deve riprodurre il simbolo "i" contestualmente presente in ingresso solo nel caso in cui "i" sia una consonante preceduta da un'altra consonante; in caso contrario,  $u = \emptyset$ .

a	b	c	d	c	b	d	b	c	a
	∅	c	d	c	b	d	b	c	∅

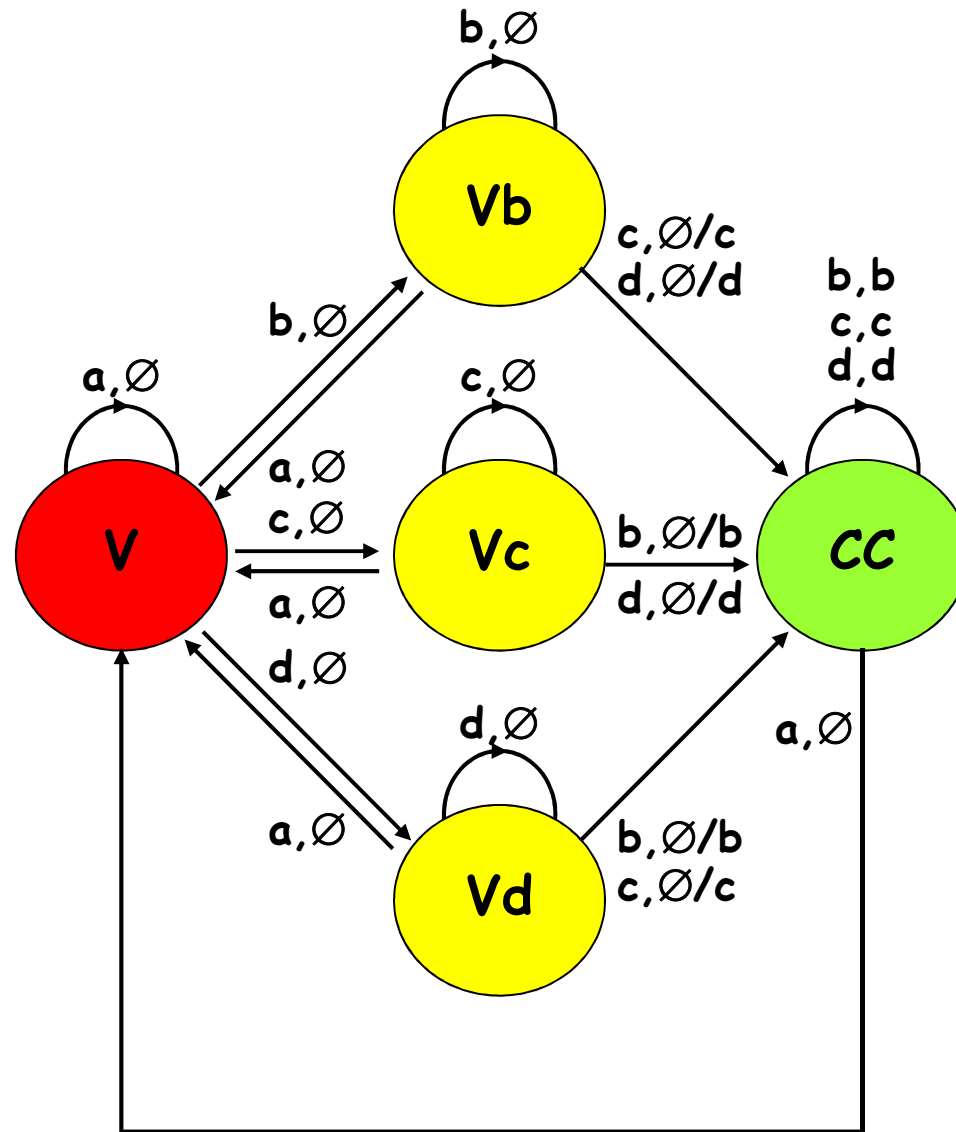


# Mealy vs. Moore



Modello di Moore: 7 stati (33/43 se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)

# Mealy vs. Moore

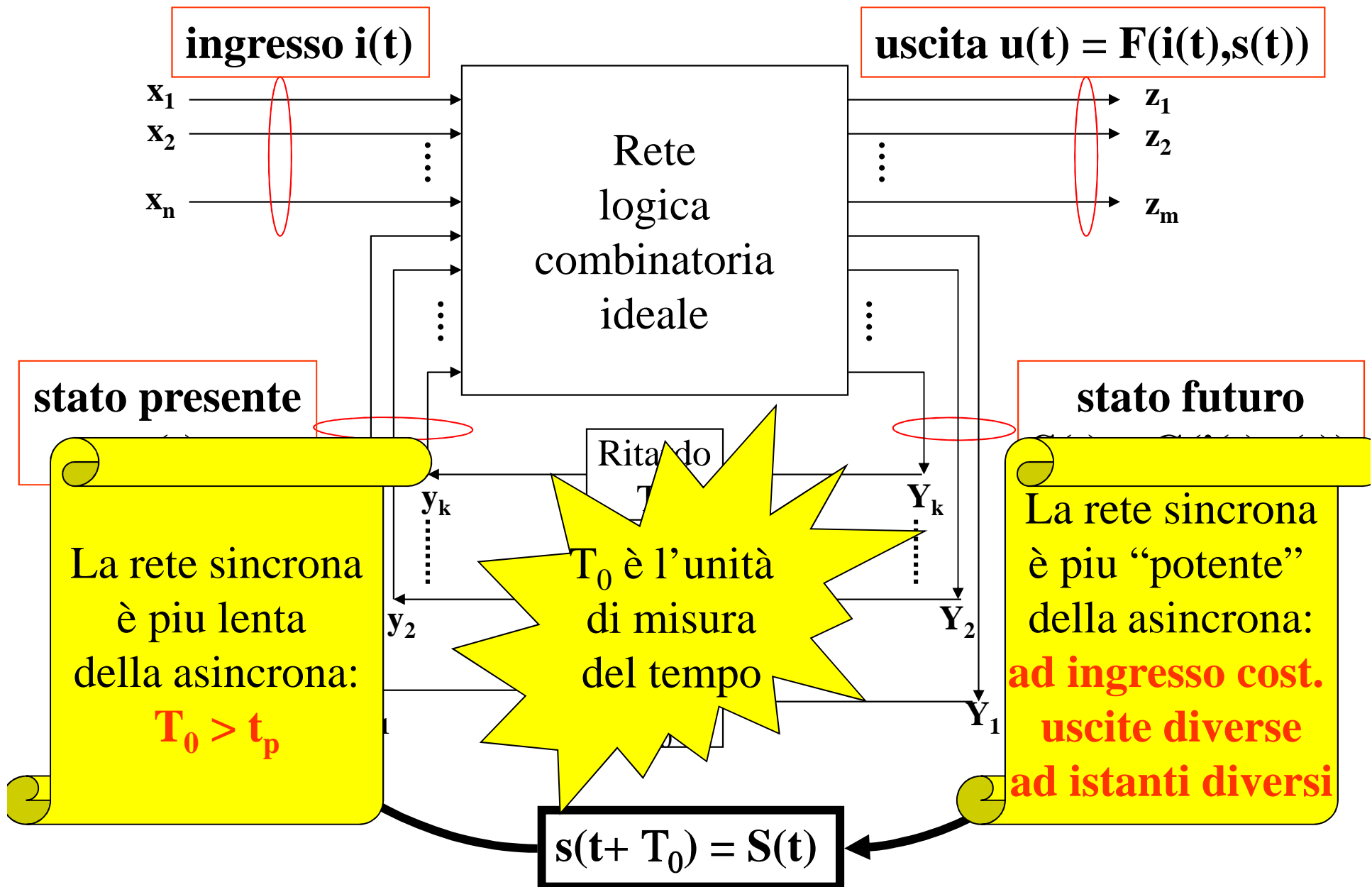


Modello di Mealy: 5 stati (18/23 se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)

A yellow starburst shape with a black outline, centered on a blue background. The starburst has multiple points of varying lengths and angles, creating a jagged, sunburst-like appearance.

**3.3**

**La macchina  
sincrona**



ingresso  $\mathbf{i}(t)$

uscita  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{i}(t), \mathbf{s}(t))$

Rete  
logica  
combinatoria  
ideale

stato presente

stato futuro

Ritardo

$T_0$  è l'unità  
di misura  
del tempo

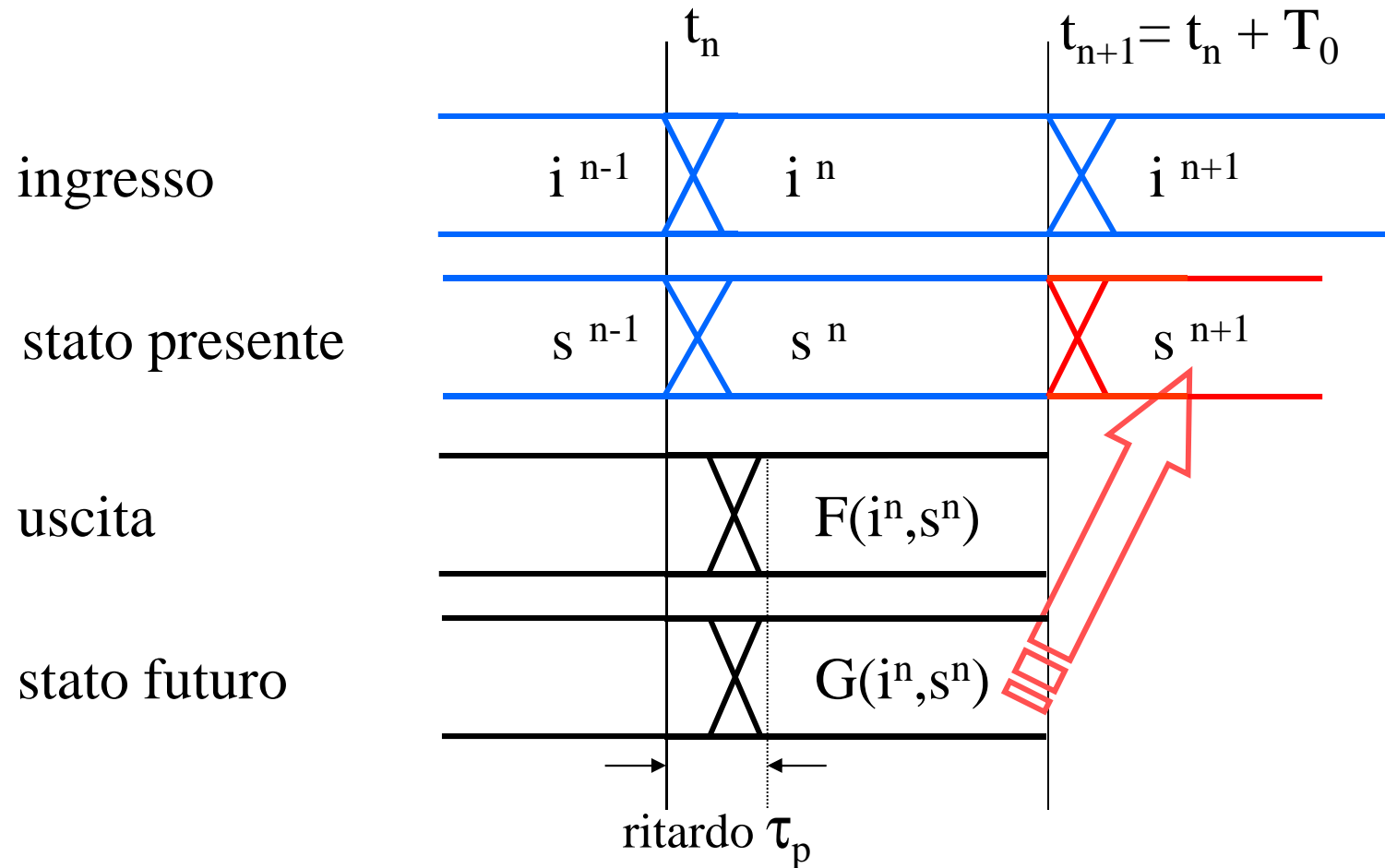
La rete sincrona  
è piu lenta  
della asincrona:  
 $T_0 > t_p$

La rete sincrona  
è piu "potente"  
della asincrona:  
ad ingresso cost.  
uscite diverse  
ad istanti diversi

$$\mathbf{s}(t+T_0) = \mathbf{S}(t)$$

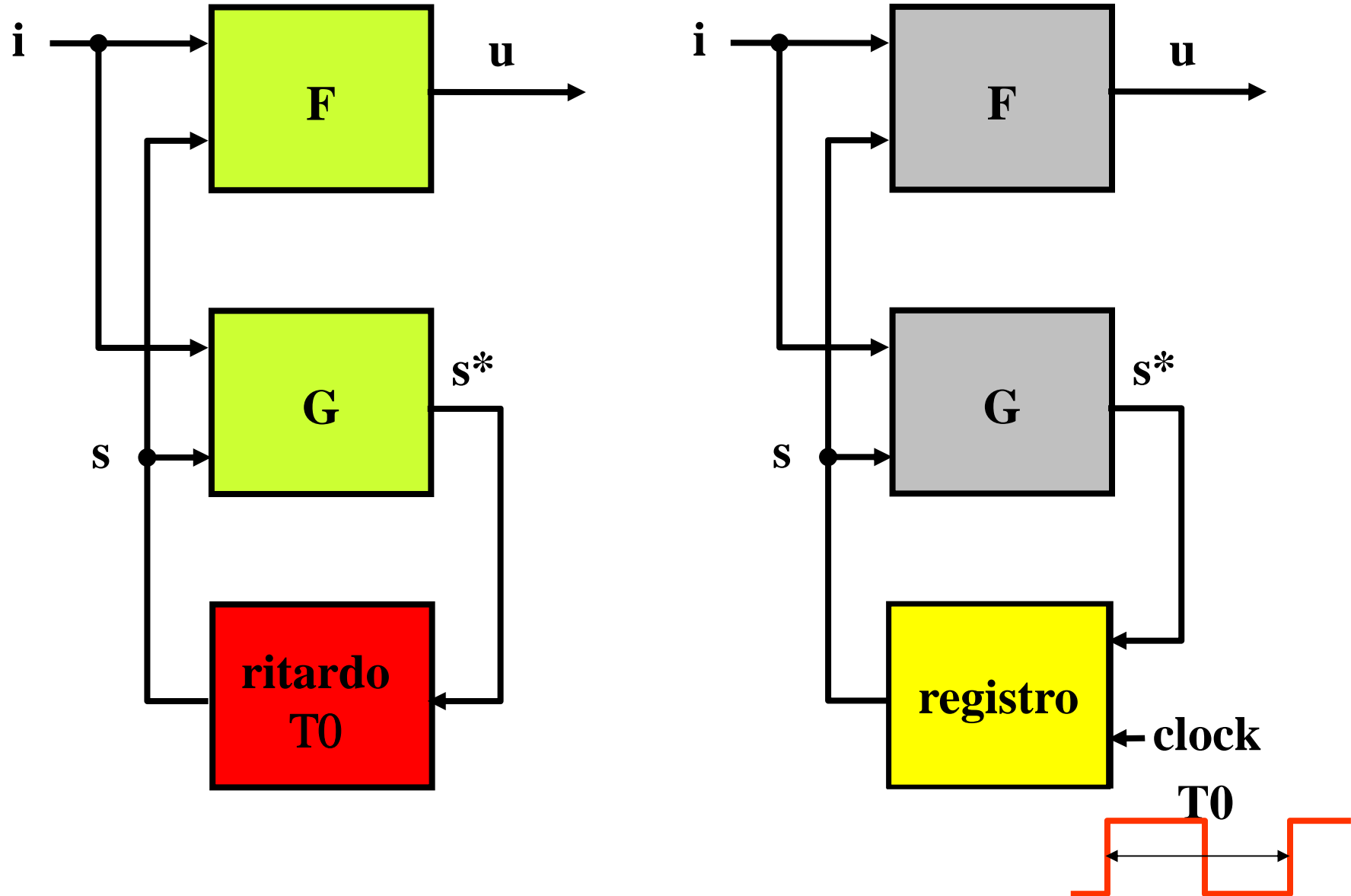
# La macchina sincrona (comportamento)

$T_0$  : intervallo di tempo in cui la macchina non modifica il suo stato



$\tau_p$  : intervallo di tempo impiegato dal calcolo di F e di G

# La macchina sincrona (struttura)

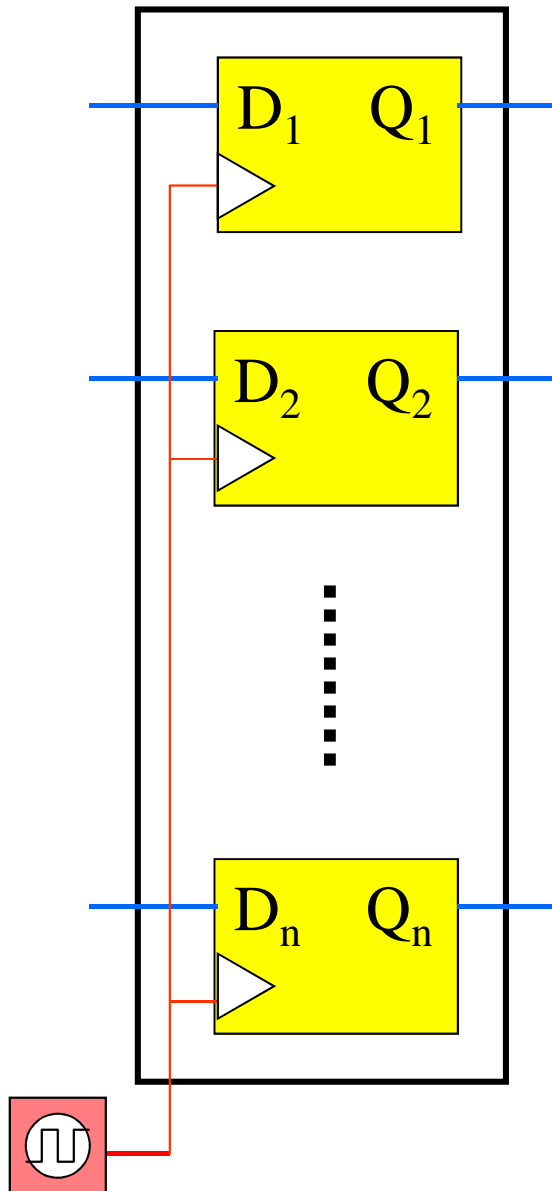


# Il registro

**Registro** - Macchina sequenziale che memorizza e rende disponibile in uscita un “dato” che in precedenza le è stato fornito in ingresso. La scrittura di un nuovo “dato” è stabilita da un comando esterno detto “clock”.



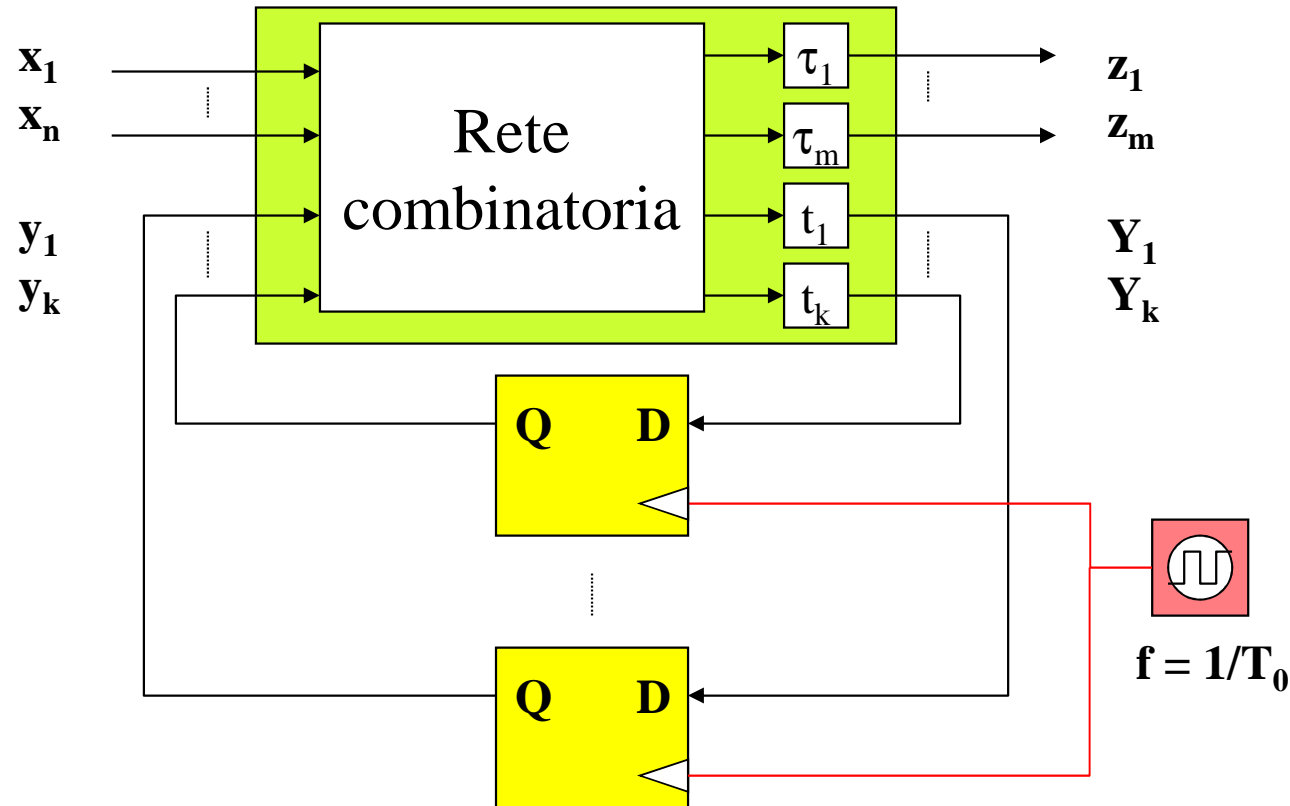
# Il registro da n bit



Il dato memorizzato  
nel registro  
viene sovrascritto  
ad ogni fronte del clock



# Rete sequenziale sincrona a flip-flop D



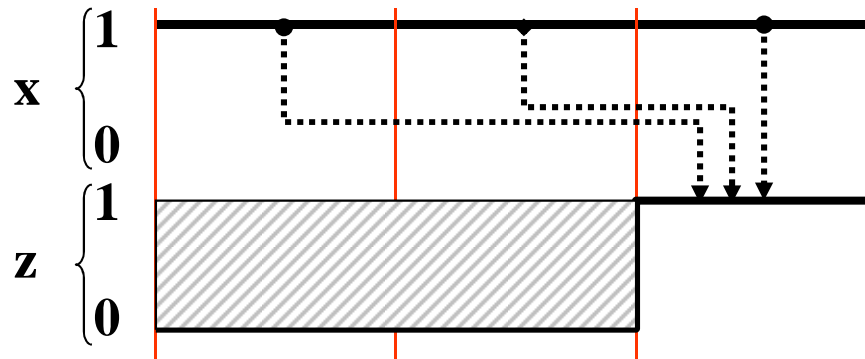
$$z_i^n = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)^n \text{ per } i = 1, \dots, m$$

$$y_i^{n+1} = D_i^n = Y_i^n = G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)^n \text{ per } i = 1, \dots, k$$

# Esempio: riconoscimento di sequenze

Una rete sequenziale sincrona ha un ingresso  $x$  ed una uscita  $z$ .  
La relazione ingresso/uscita è descritta dalla seguente frase:

“ $z^n = 1$  quando  $x^n = 1$  e solo se  $x^{n-1} = x^{n-2} = 1$ ”

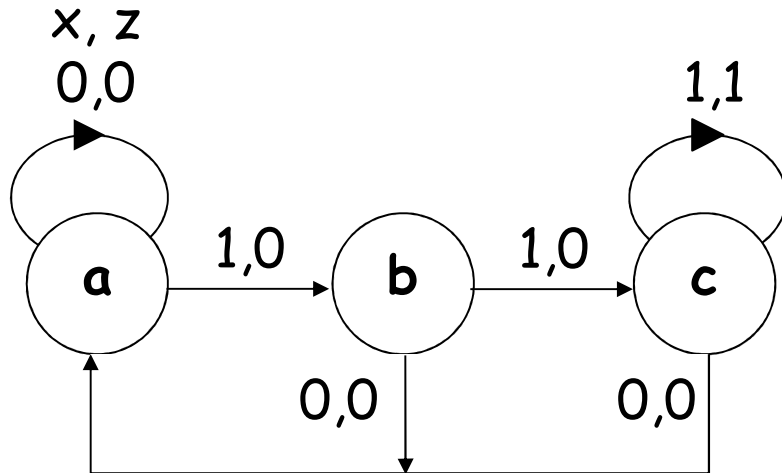


Riconoscitore di 3 “uni” consecutivi

$$z^n = x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2}$$

# Grafo degli stati e Tabella di flusso

## Modello di Mealy



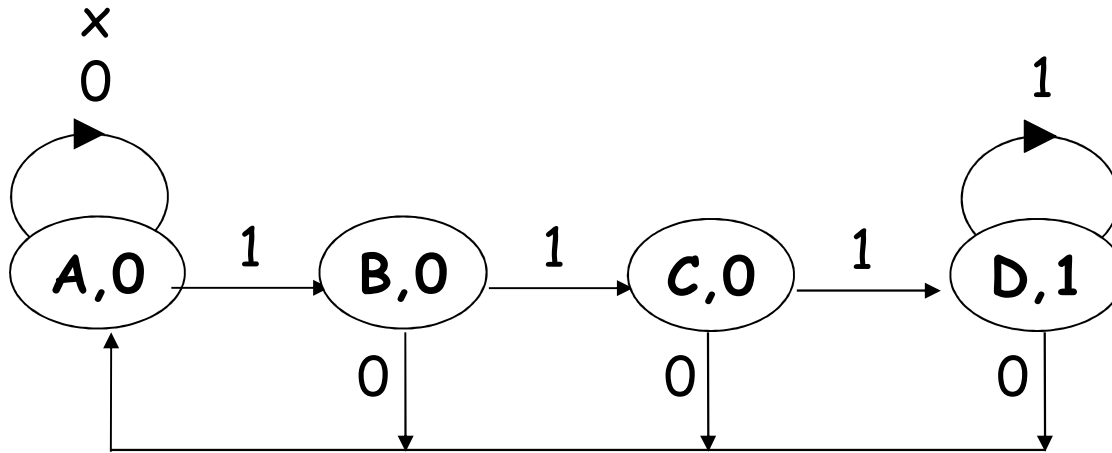
x	0	1	1	1	1	0	0
s.p.	a	a	b	c	c	c	a
s.f.	a	b	c	c	c	a	a
z	0	0	0	1	1	0	0

		x	
		0	1
	a	a,0	b,0
s.p.	b	a,0	c,0
	c	a,0	c,1
		s.f.,z	

Ogni stato resta presente per almeno un periodo di clock, ogni cambiamento di ingresso avviene all'inizio di tali intervalli ed ogni transizione si verifica al termine. La stabilità dello stato presente non è una condizione necessaria dopo una variazione di ingresso.

# Grafo degli stati e Tabella di flusso

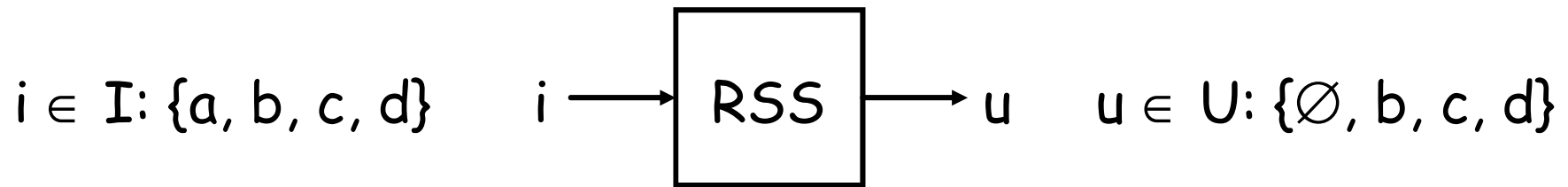
## Modello di Moore



x	0	1	1	1	1	0	0
s.p.	A	A	B	C	D	D	A
s.f.	A	B	C	D	D	A	A
z	0	0	0	0	1	1	0

	x		
	0	1	
A	A	B	0
B	A	C	0
C	A	D	0
D	A	D	1
	s.f.		z

# Mealy vs. Moore



Comportamento:

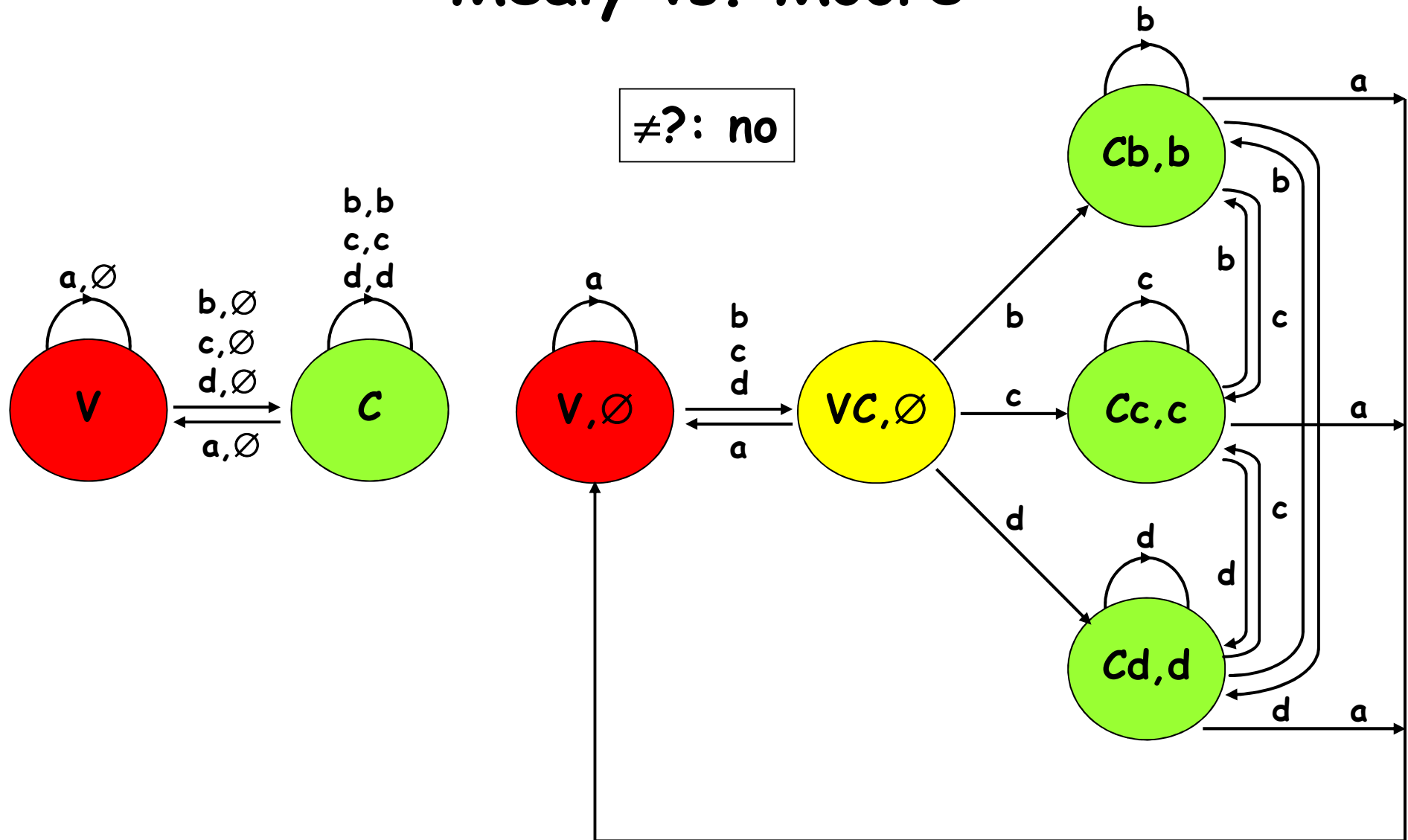
il simbolo di uscita "u" deve riprodurre il simbolo "i"  
 contestualmente presente in ingresso solo nel caso in cui  
 "i" sia una consonante preceduta da un'altra ( $\neq ?$ ) consonante;  
 in ogni altro caso,  $u = \emptyset$ .

$\neq ?$ :	a	b	b	b	c	c	d	c	b	b	d	d	d	b	c	c	a
sì	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	c	$\emptyset$	d	c	b	$\emptyset$	d	$\emptyset$	$\emptyset$	b	c	$\emptyset$	$\emptyset$
no	$\emptyset$	$\emptyset$	b	b	c	c	d	c	b	b	d	d	d	b	c	c	$\emptyset$
sì	...	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	c	$\emptyset$	d	c	b	$\emptyset$	d	$\emptyset$	$\emptyset$	b	c	$\emptyset$
no	...	$\emptyset$	$\emptyset$	b	b	c	c	d	c	b	b	d	d	d	b	c	c

**Mealy**

**Moore**

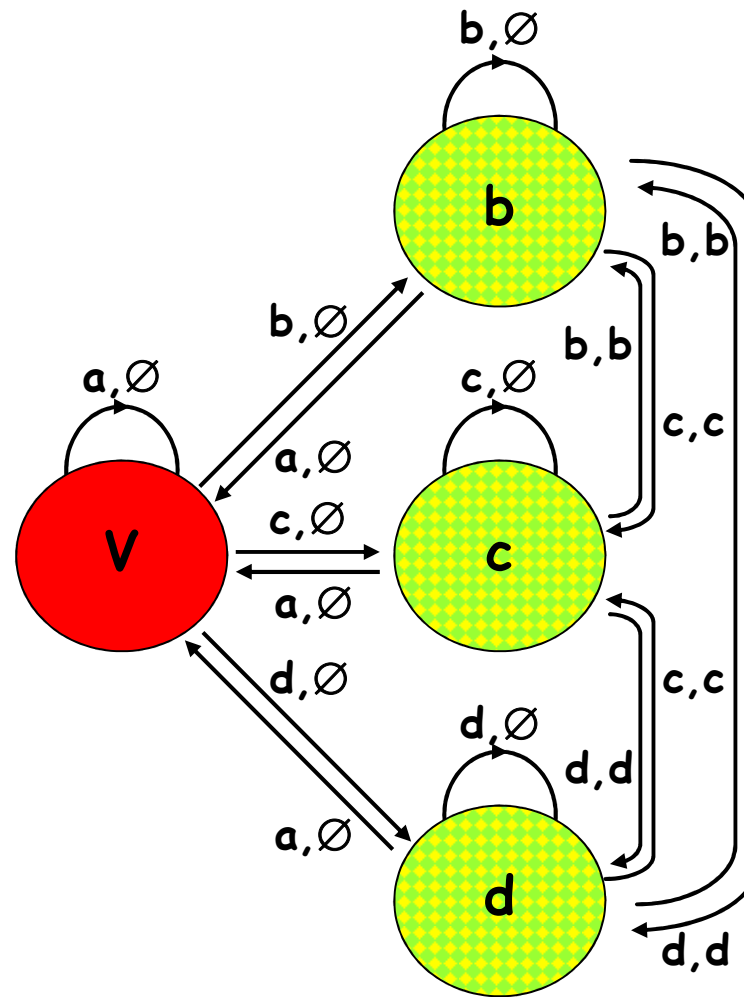
# Mealy vs. Moore



Modello di Mealy: 2 stati (anche se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)  
 Modello di Moore: 5 stati (18/23 se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)

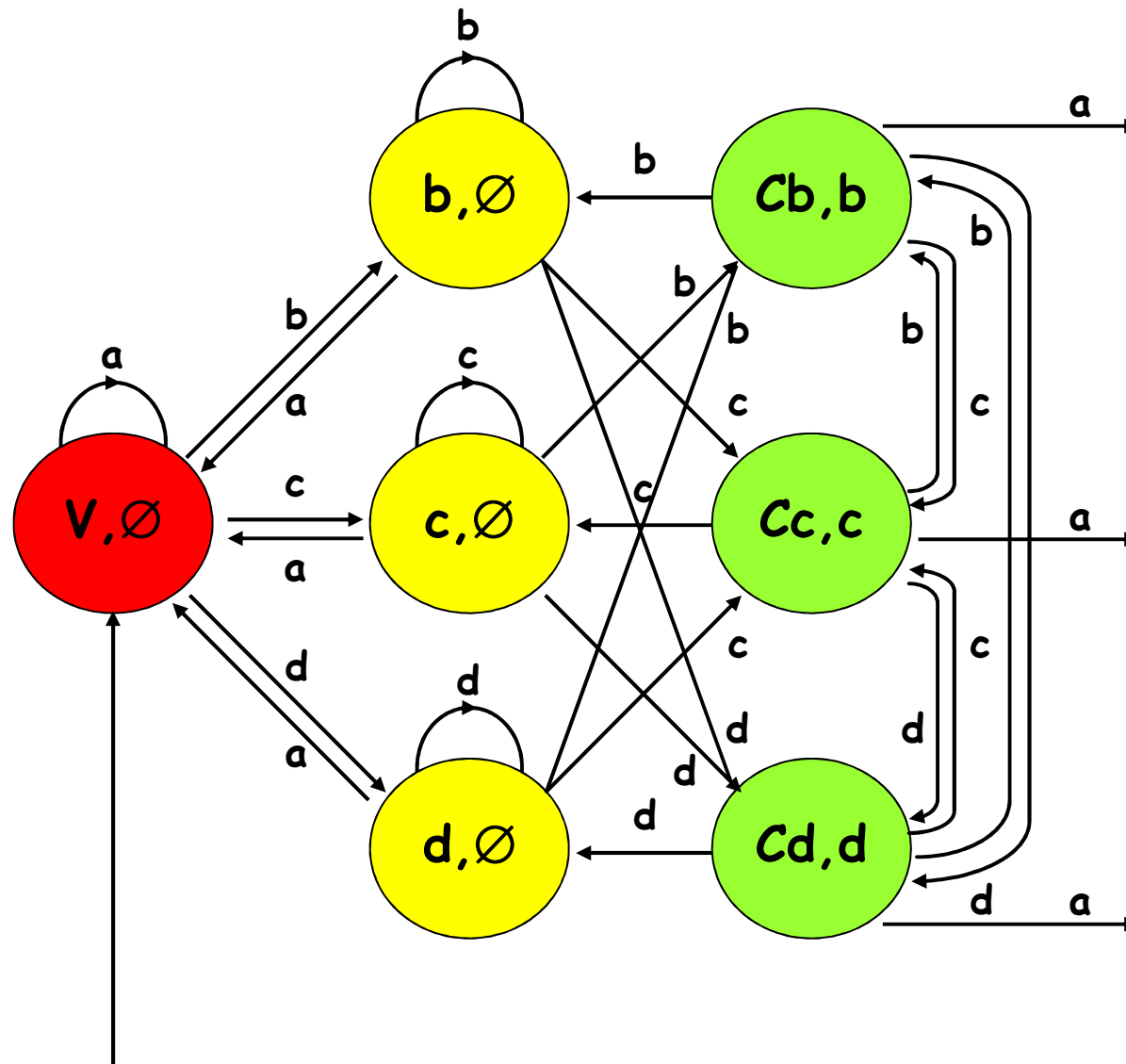
# Mealy vs. Moore

≠?: sì



Modello di Mealy: 4 stati (17/22 se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)

# Mealy vs. Moore



Modello di Moore: 7 stati (33/43 se  $I \equiv$  alfabeto italiano/inglese)



# Compito in classe: Esercitazione N. 1

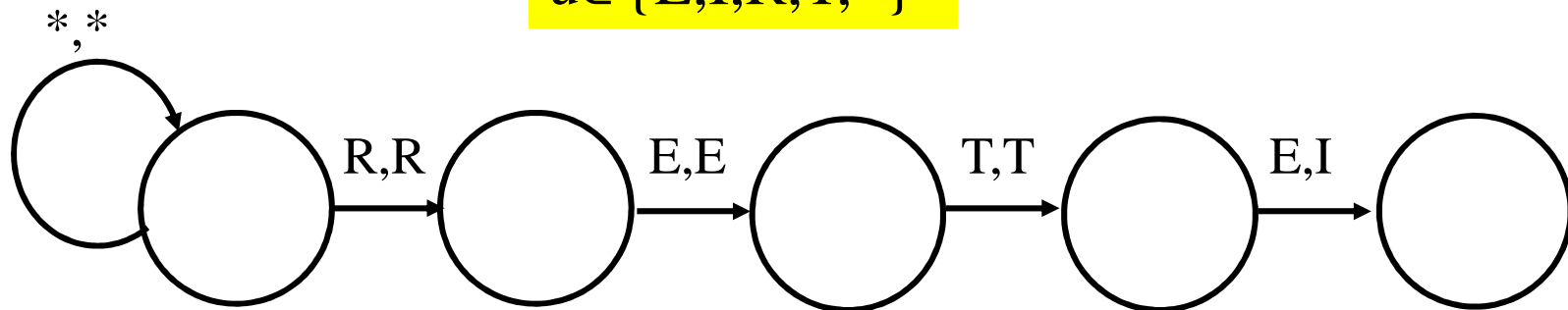
$i, u \in \{A, B, \dots, Z\}$



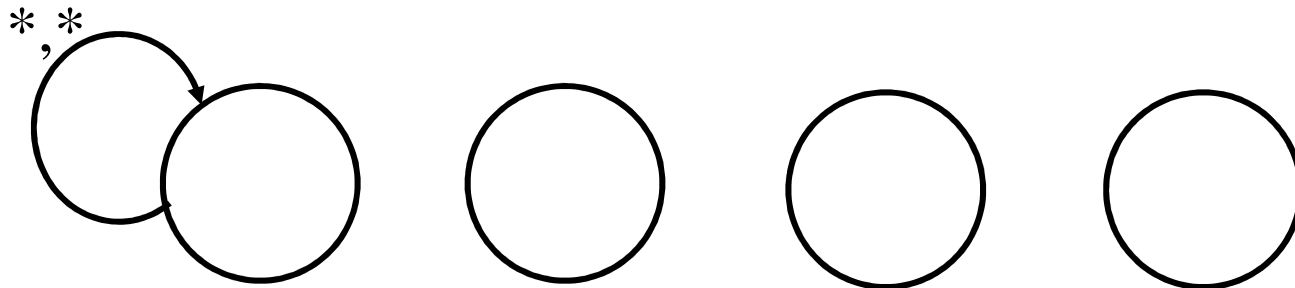
**Trova: ..RETE..**  
**Sostituisci: ..RETI..**

$i \in \{E, R, T, *\}$   
 $u \in \{E, I, R, T, *\}$

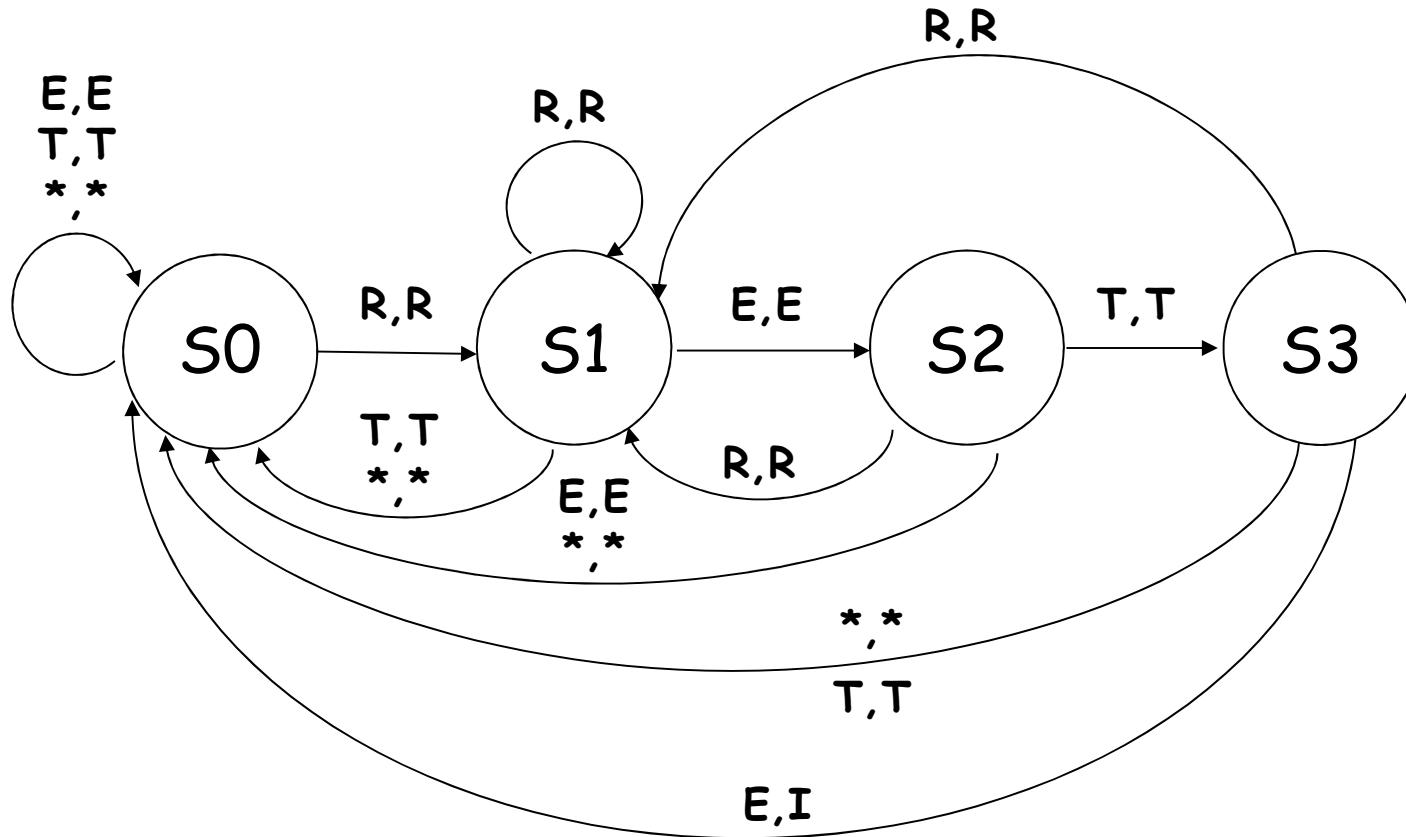
1.



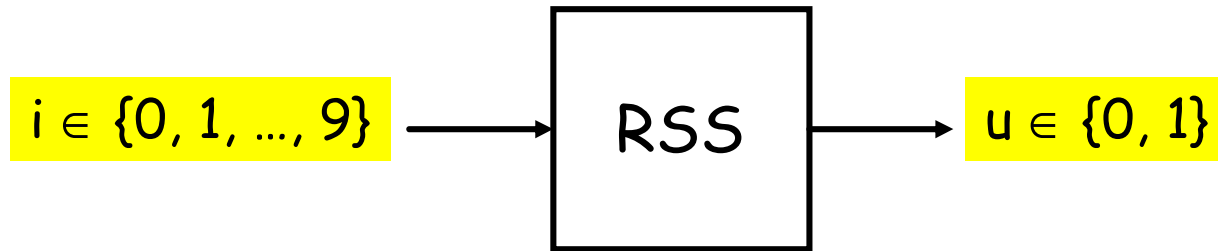
2.



# Soluzione domanda N.2 (grafo)

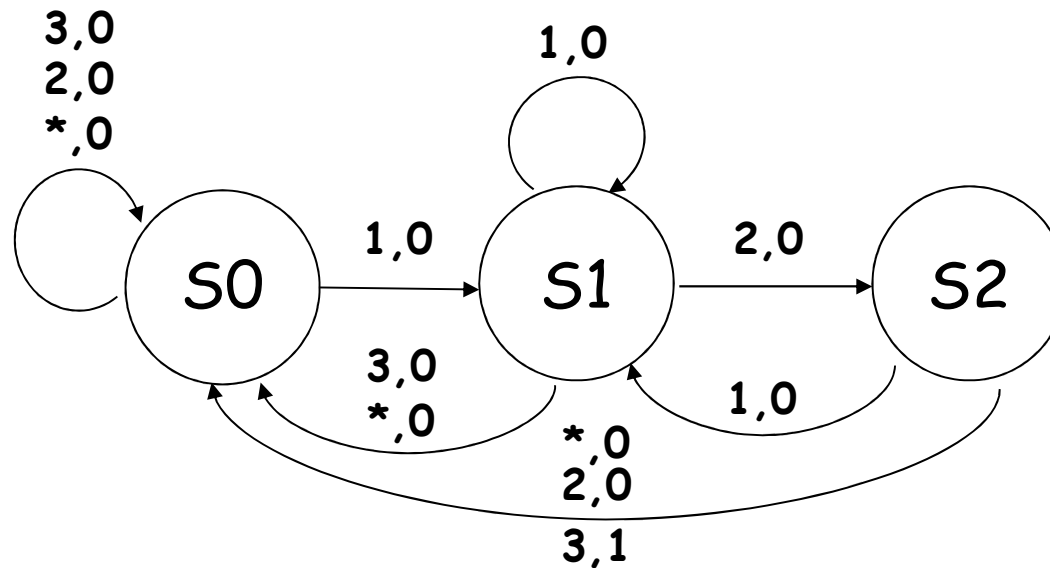


# Riconoscimento di sequenze

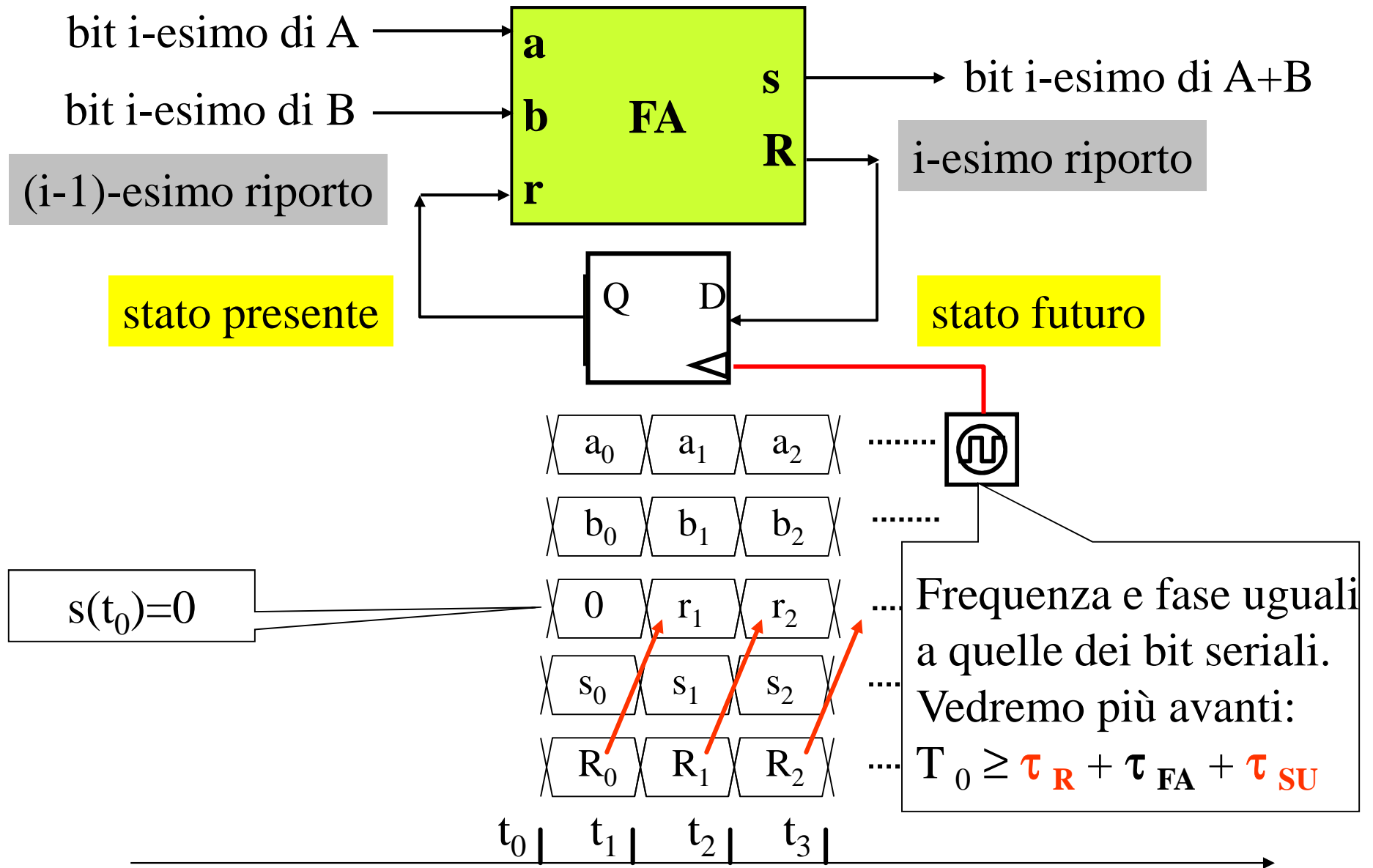


Comportamento:

$u = 1$  in corrispondenza dell'ultimo simbolo della sequenza di ingresso 1-2-3  
(\* : {0, 4, ..., 9})



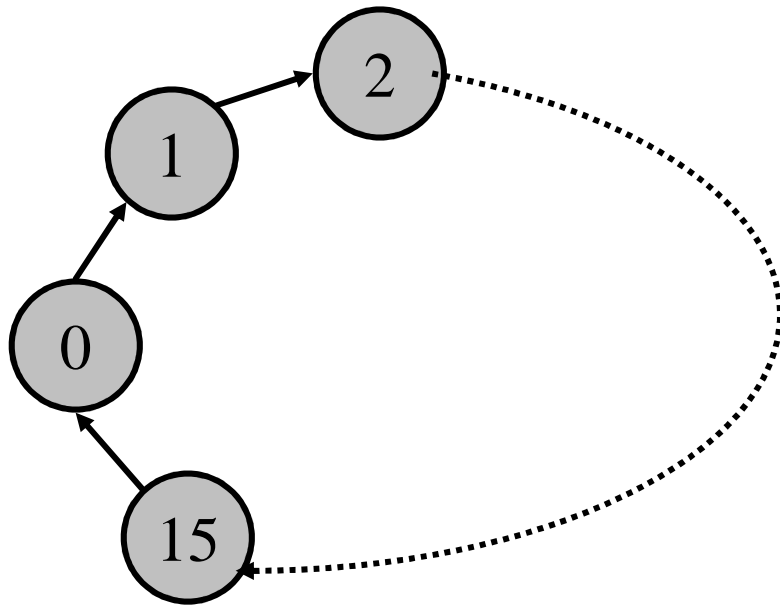
# Addizione colonna per colonna: macchina sequenziale sincrona



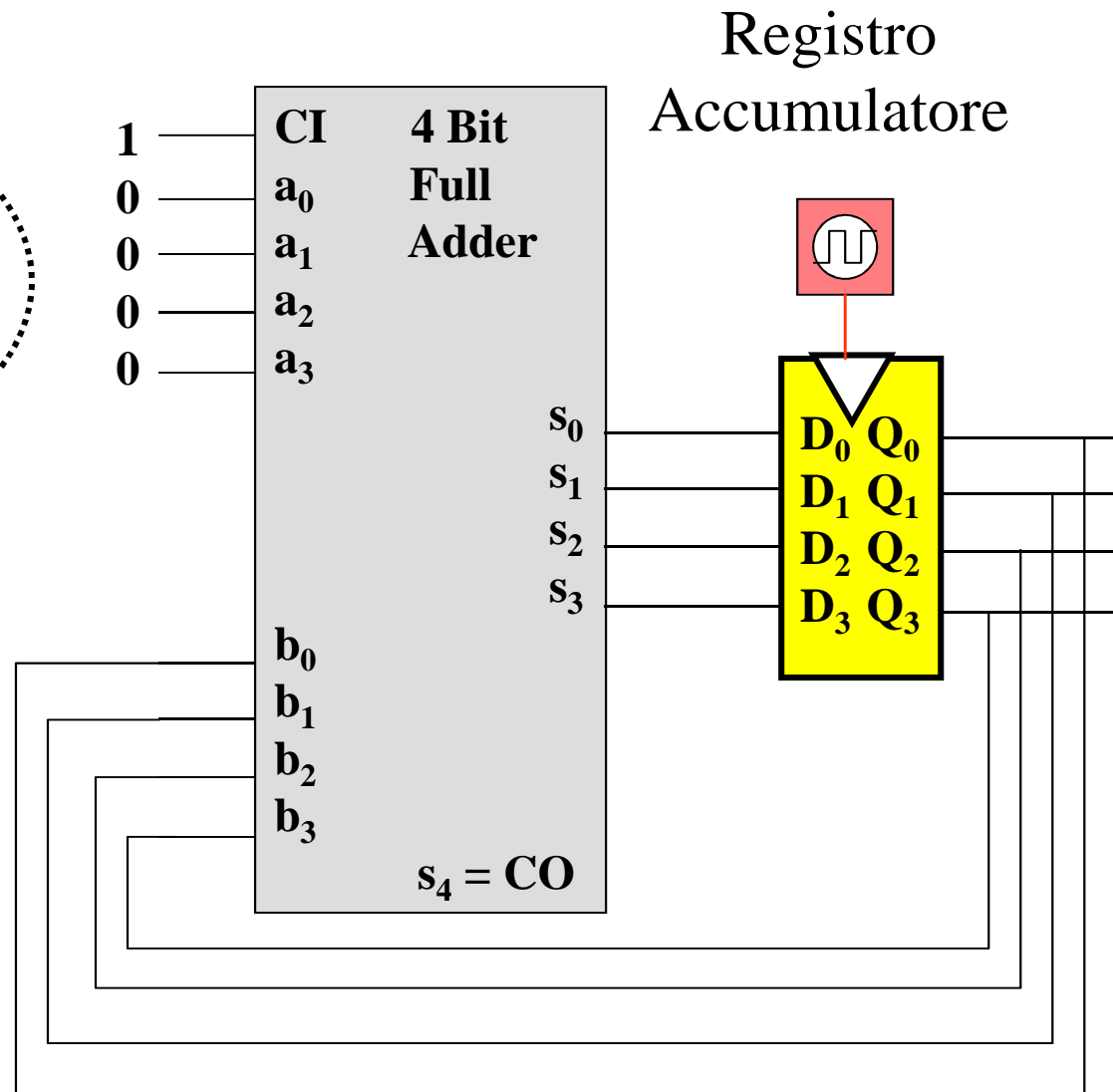
A white starburst shape with a black outline is centered on a blue background. The starburst has multiple points of varying lengths and angles, creating a jagged, sunburst-like appearance. The word "Contatore" is written in a bold, black, serif font in the center of the white area.

**Contatore**

# Il contatore binario x16



$s^n$	$s^{n+1}$
0000	0001
0001	0010
....	....
1110	1111
1111	0000

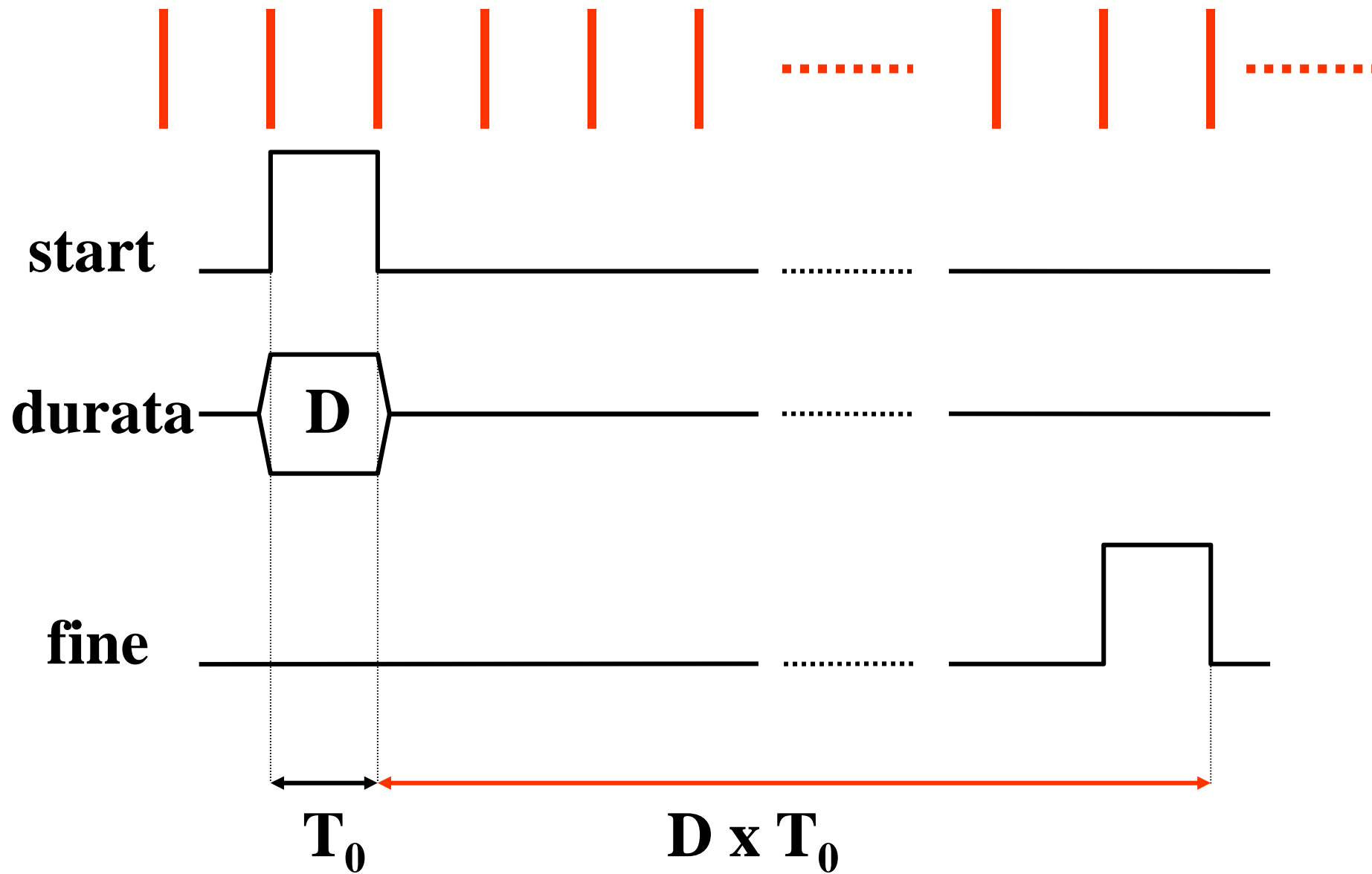


$$s^{n+1} = (s^n + 1) \bmod 16$$

A white starburst shape with a black outline is centered on a blue background. The starburst has multiple points of varying lengths and angles, creating a jagged, star-like appearance. The text "Watch-dog" is centered within the white area of the starburst.

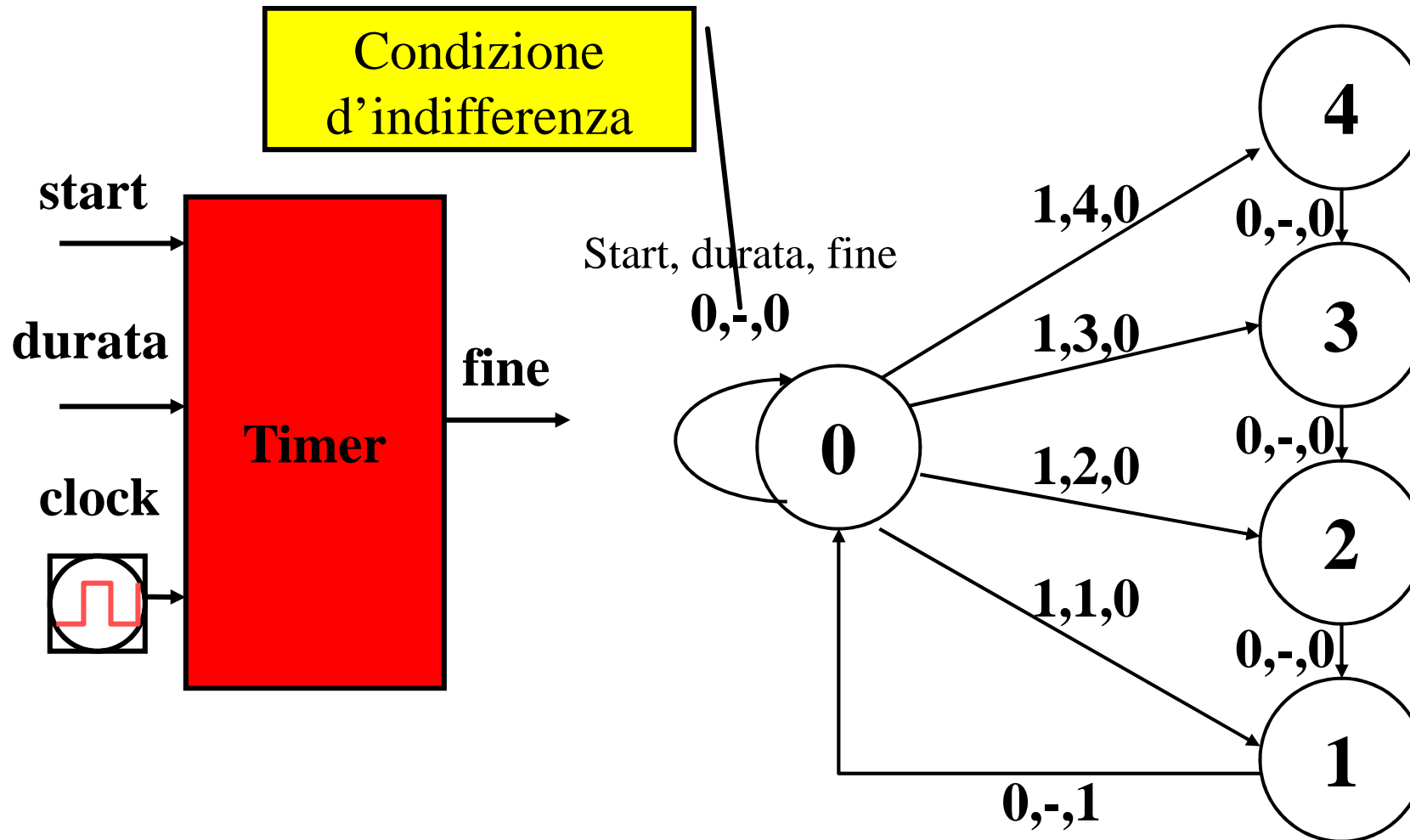
**Watch-dog**

# Timer 0 watch-dog (1)



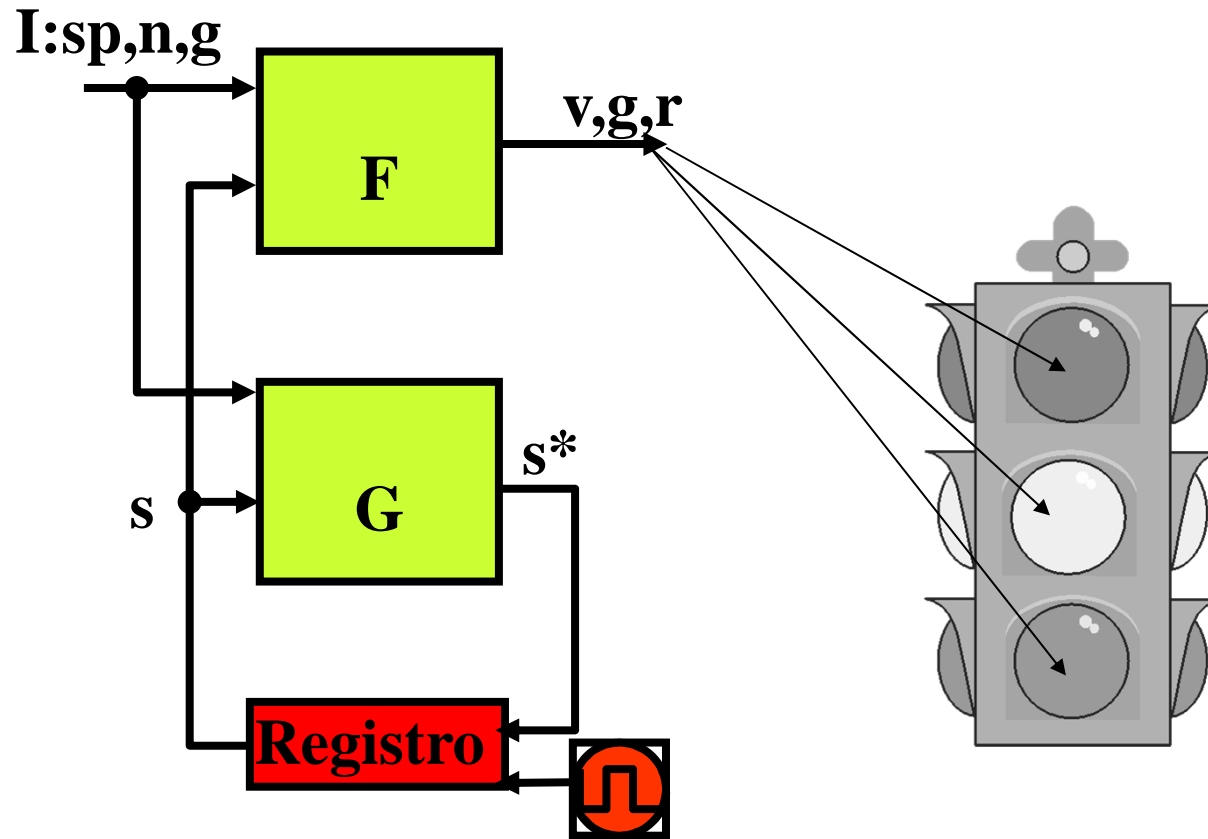


# Timer o watch-dog (2)



*La macchina usa il periodo del clock come "unità di misura" del tempo.*

# Il semaforo



**Specifiche:**

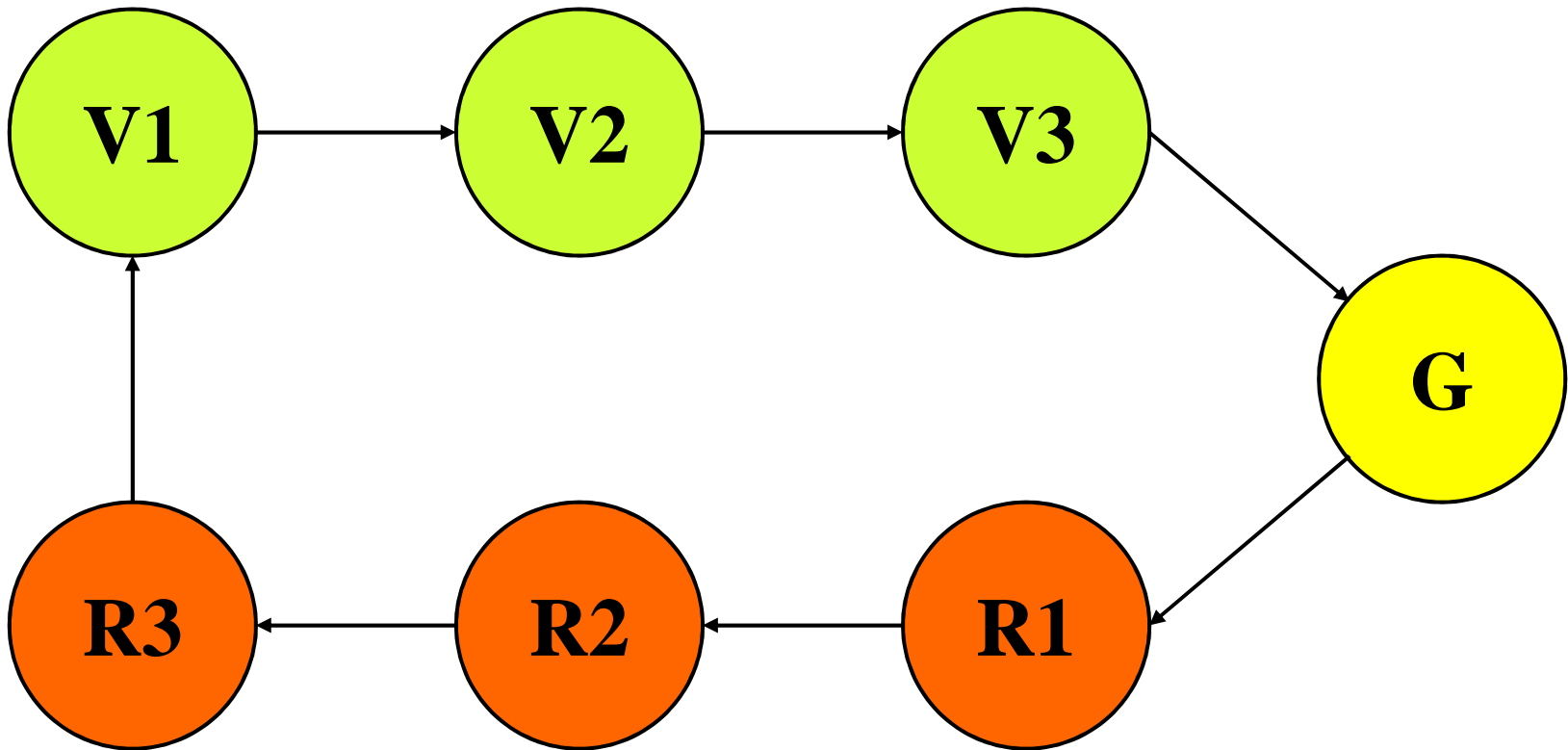
*rosso* = 60 s

*giallo* = 20 s

*verde* = 60 s

$T_0 = 20$  s

# Il grafo degli stati



# La tabella di flusso

<b>stato presente</b>	<b>stato futuro</b>	<b>lampada</b>		
		<b>verde</b>	<b>giallo</b>	<b>rosso</b>
<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>accesa</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>
<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>accesa</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>
<b>V3</b>	<b>G</b>	<b>accesa</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>
<b>G</b>	<b>R1</b>	<b>spenta</b>	<b>accesa</b>	<b>spenta</b>
<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>	<b>accesa</b>
<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>	<b>accesa</b>
<b>R3</b>	<b>V1</b>	<b>spenta</b>	<b>spenta</b>	<b>accesa</b>

# La macchina sequenziale per il semaforo

## Stato interno

$S = y_2 y_1 y_0$  (7 stati)

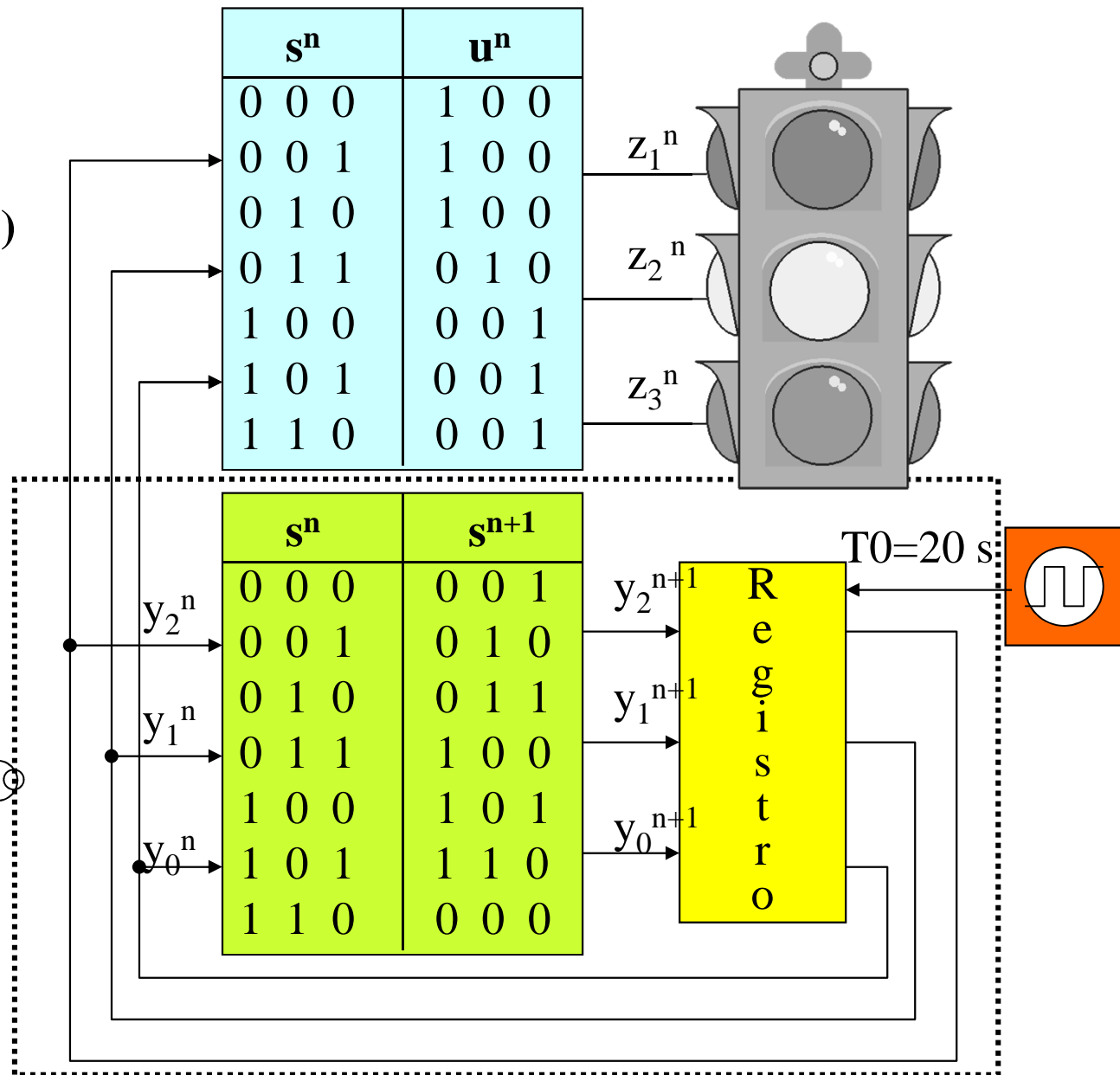
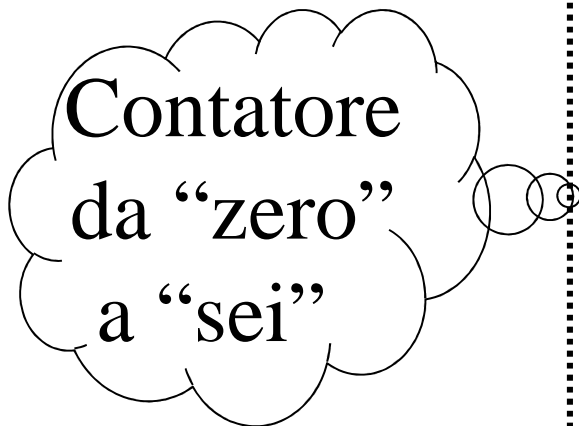
## Uscita

$u = z_1 z_2 z_3$  (codice 1 su 3)

## Comportamento:

$s_2 \leftarrow (s+1)_2 \text{ mod } 7$

$u \leftarrow F(s)$



..e la seconda direttrice di marcia?

stato presente	stato futuro	lampade					
		V <sub>1</sub>	G <sub>1</sub>	R <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	G <sub>2</sub>	R <sub>2</sub>
0	1	1	0	0	0	0	1
1	2	1	0	0	0	0	1
2	3	1	0	0	0	0	1
3	4	0	1	0	0	0	1
4	5	0	0	1	1	0	0
5	6	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0