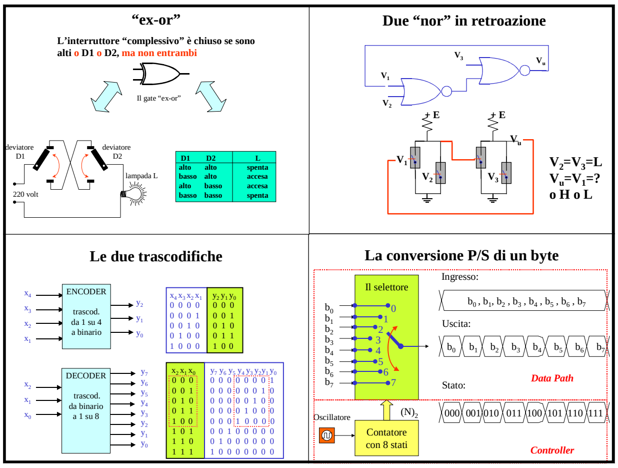
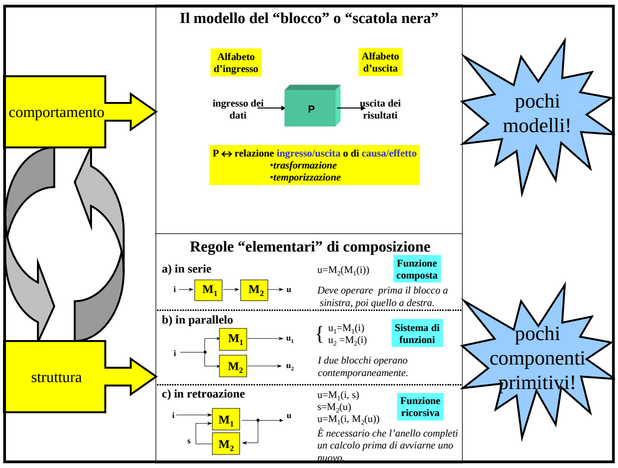
Capitolo 3

Modelli

- 3.1 – La macchina a stati finiti
- 3.2 – La macchina combinatoria
- 3.3 – La macchina asincrona
- 3.4 – La macchina sincrona

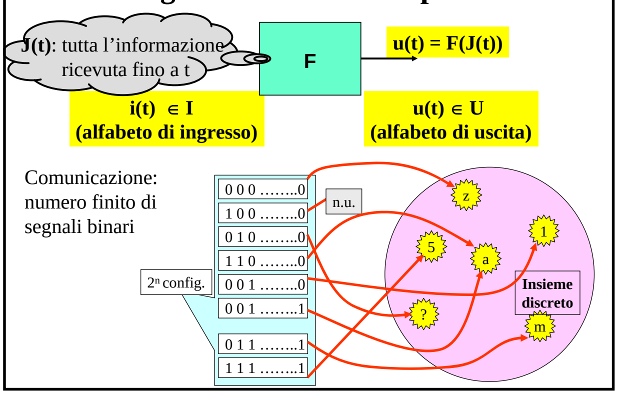




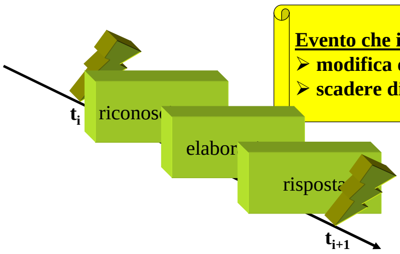
3.1
La macchina a stati finiti

Digitale è sinonimo di discreto

La discretizzazione degli stimoli e delle risposte



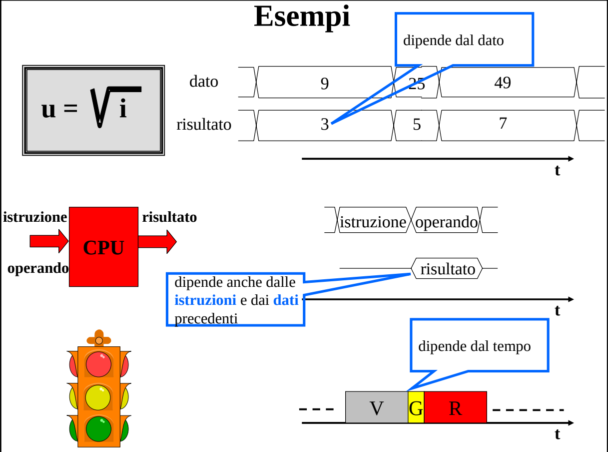
La discretizzazione del tempo



Evento che introduce informazione
- ➢ **modifica dell'ingresso**
- ➢ **scadere di un intervallo di tempo**

l'uscita attuale può dunque dipendere:
- **dall'ingresso contemporaneo**
- **dagli ingressi precedenti**
- **dal trascorrere del tempo**

Esempi



Sequenze di ingressi e di uscite

Indichiamo con

$t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$

una sequenza finita di istanti in cui si sono verificati degli eventi

l'uscita al generico istante t_n dipende
- ➢ **dalla sequenza di ingresso $i(t_0) \Rightarrow i(t_1) \Rightarrow \dots \Rightarrow i(t_{n-1}) \Rightarrow i(t_n)$**

$u(t_n) = F(\dots i(t_0), i(t_1), \dots, i(t_{n-1}), i(t_n))$

e questo come si esprime??

e
- ➢ **dalla condizione iniziale della macchina $s(t_0)$.**

$u(t_n) = F(s(t_0), i(t_0), i(t_1), \dots, i(t_{n-1}), i(t_n))$

Lo stato iniziale

$s(t_0) \in S$

Esempio : il percorso di un'auto dipende non solo dai comandi via via dati con volante, freno, acceleratore, ma anche dalla benzina inizialmente nel serbatoio e dallo stato di usura delle gomme.

Esempio : Non basta caricare un orologio per avere l'ora esatta. L'ora indicata dipende infatti non solo dal n° di scatti che la molla ha dato alle lancette, ma anche dalla loro posizione iniziale.

Esempi: digitazione del PIN allo sportello Bancomat, posizione del bit in uscita dal convertitore P/S

Sequenze di ingressi, di uscite e di stati

$u(t_n) = F(\underbrace{s(t_0), i(t_0)}_{s(t_1)}, i(t_1), \dots, i(t_{n-1}), i(t_n))$ $\quad s(t_0) \in S$

$u(t_n) = F(\underbrace{s(t_1), i(t_1)}_{s(t_2)}, \dots, i(t_{n-1}), i(t_n))$ $\quad s(t_1) \in S$

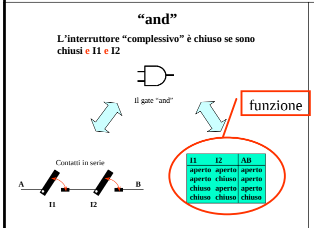
⋮

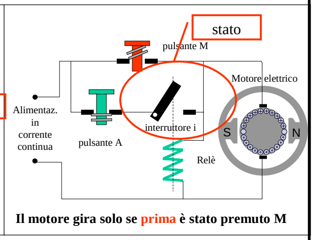
$$\begin{cases} u(t_n) = F(s(t_n), i(t_n)) & s(t_n) \in S \quad \text{stato interno } \textbf{presente} \\ s(t_{n+1}) = G(s(t_n), i(t_n)) & s(t_{n+1}) \in S \quad \text{stato interno } \textbf{futuro} \end{cases}$$

Classificazione dei comportamenti

Tipo di macchina	Relazione ingresso/uscita
sequenziale	$u(t_n) = F(\, s(t_n), i(t_n))$ $s(t_{n+1}) = G(\, s(t_n), i(t_n))$
	caso più semplice?
combinatoria	$u(t_n) = F(i(t_n))$ $u = F(i)$

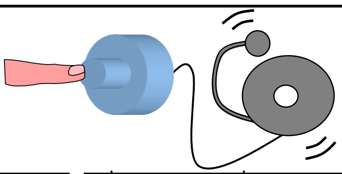
Esempi





Macchina combinatoria   Macchina sequenziale

Il campanello



i: Pulsante	*u: Suoneria*
Premuto	**din**
Rilasciato	**nessun suono**

$u = F(i)$

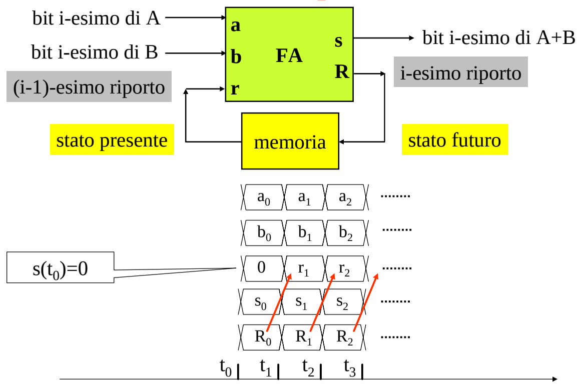
Macchina combinatoria

	i: Pulsante	*u: Suoneria*
t_0	**Premuto**	**din**
t_1	**Rilasciato**	**nessun suono**
t_2	**Rilasciato**	**don**
t_3	**Rilasciato**	**nessun suono**

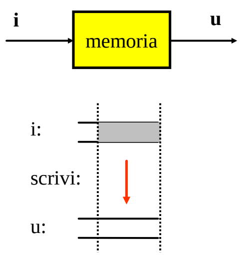
$u(t_j) = F(i(t_j), i(t_{j-1}), ..)$

Macchina sequenziale: a parità d'ingresso risposte diverse ad istanti diversi

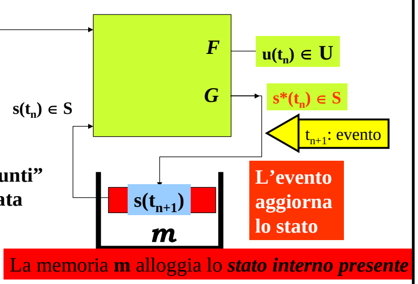
Addizione colonna per colonna: macchina sequenziale



La memoria: macchina sequenziale



La struttura della macchina a stati finiti



L'insieme *finito* S contiene tutti i "riassunti" utili della storia passata della macchina.

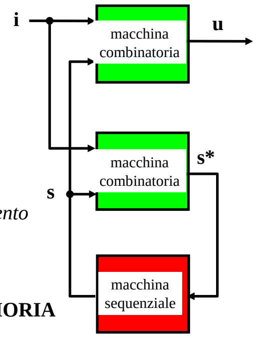
La memoria **m** alloggia lo ***stato interno presente***

La funzione ***F*** , tramite $i(t_n)$ e $s(t_n)$, calcola la ***risposta*** $u(t_n)$

La funzione ***G***, con gli stessi argomenti, calcola il ***nuovo riassunto*** $s^*(t_n)$ (detto ***stato interno futuro***)

La FSM (Finite State Machine)

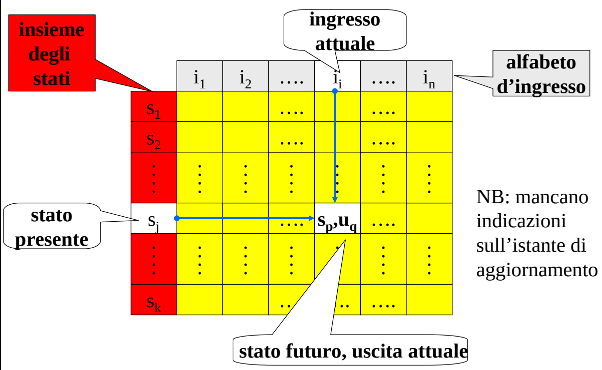
Sistema matematico
M = {I, U, S, F, G}
formato da 3 INSIEMI
I: $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ *alfabeto di ingresso*
U: $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ *alfabeto di uscita*
S: $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ *insieme degli stati*
e da 2 FUNZIONI
F : $S \times I \rightarrow U$ *funzione di uscita*
G : $S \times I \rightarrow S$ *funzione di aggiornamento dello stato interno*



Nella realizzazione occorre una MEMORIA
che mantenga il "vecchio stato" s
fino a quando non è necessario
*sostituirlo con il "nuovo stato" s**

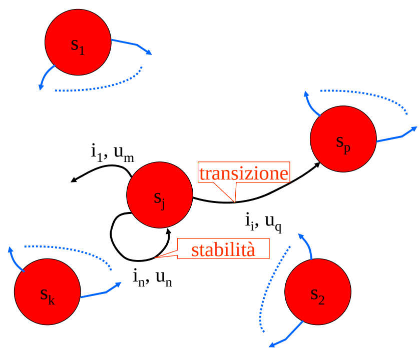
Tabella di flusso e Grafo degli stati

Descrizione con tabella di flusso



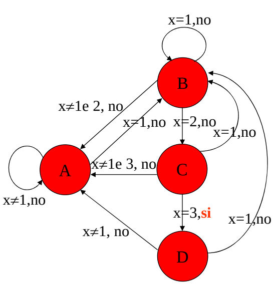
NB: mancano indicazioni sull'istante di aggiornamento

Descrizione con grafo degli stati



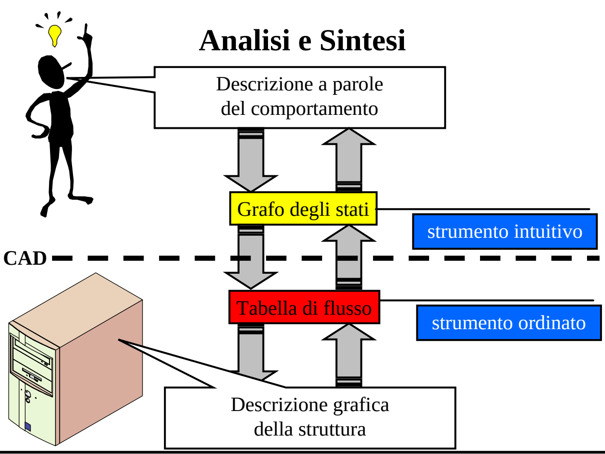
Esempio: analisi di una stringa

Stringa: x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) …   con x(i)∈{0,1,..,9}
Risposta: "si" se x(i) x(i+1) x(i+2) = 123 , "no" in ogni altro caso



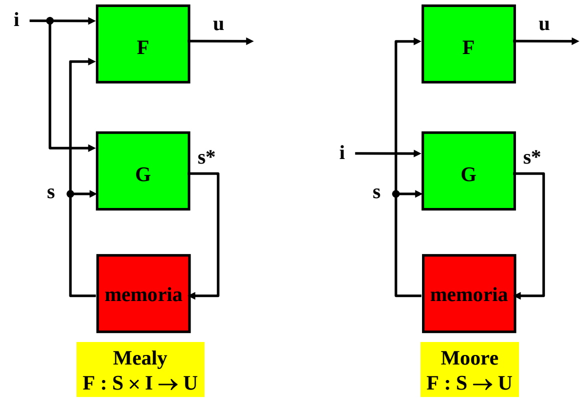
	1	2	3	4÷9
A	B,no	A,no	A,no	A,no
B	B,no	C,no	A,no	A,no
C	B,no	A,no	D,si	A,no
D	B,no	A,no	A,no	A,no

Analisi e Sintesi



Casi particolari

1: Automa di Mealy e Automa di Moore



Automa di Mealy e automa di Moore

GRAFO:
simbolo d'uscita
all'interno del nodo

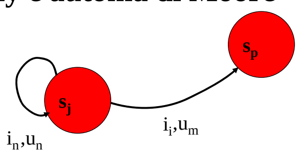
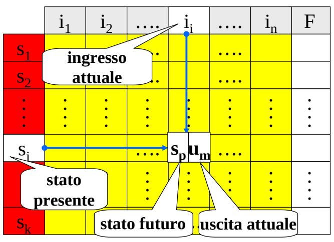
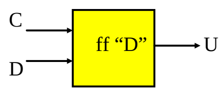


TABELLA:
ulteriore colonna
per specificare
la **F : S → U**



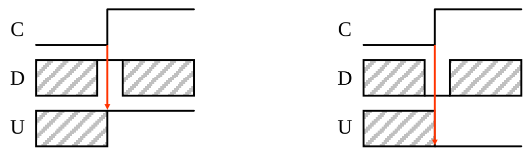
Esempio: il flip-flop D

Macchina con ingressi C,D ed uscita U.
U riproduce il valore presente su D in corrispondenza di ogni fronte di salita di C

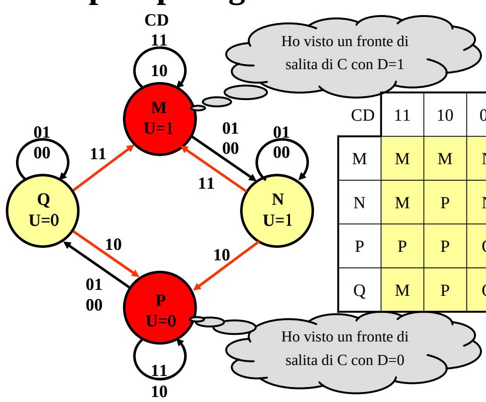


Il "campionamento" di D=1 determina U=1

Il "campionamento" di D=1 determina U=1



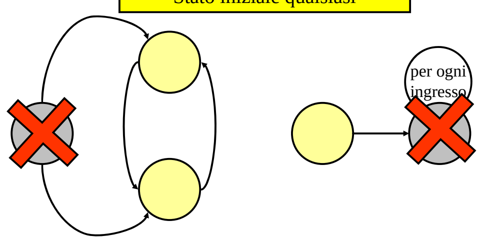
Il flip-flop D: grafo e tabella di Moore



CD	11	10	01	00	U
M	M	M	N	N	1
N	M	P	N	N	1
P	P	P	Q	Q	0
Q	M	P	Q	Q	0

2: Grafi strettamente connessi

Macchine che non si fermano mai
Stato iniziale qualsiasi



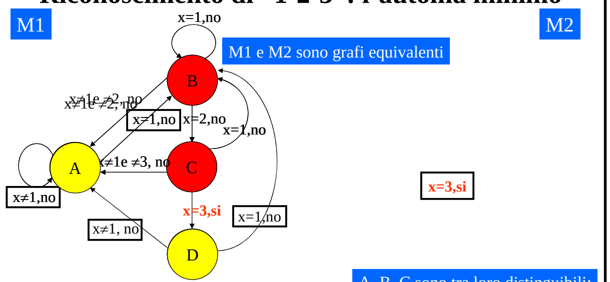
Deve esistere almeno una sequenza d'ingresso che consenta di passare da uno stato arbitrariamente scelto ad un altro stato arbitrariamente scelto

3: Stati indistinguibili e Automi equivalenti

La descrizione con un automa di un comportamento sequenziale **non è unica**

- **Stati indistinguibili**: due o più stati a partire dai quali, per ogni possibile sequenza d'ingresso, si ottengono **sequenze d'uscita identiche**
- **Automi equivalenti**: automi che descrivono lo stesso comportamento con **differente numero di stati interni**
- **Automa minimo**: automa i cui stati interni sono tutti tra loro **distinguibili**

Riconoscimento di "1-2-3": l'automa minimo

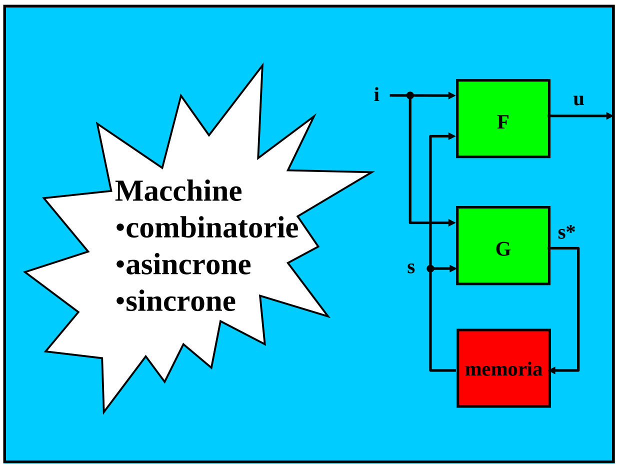


A e B sono stati indistinguibili

	1	2	3	4÷9
A	B,no	A,no	A,no	A,no
B	B,no	C,no	A,no	A,no
C	B,no	A,no	D,si	A,no
D	B,no	A,no	A,no	A,no

A, B, C sono tra loro distinguibili: la tabella è minima

{A,D}	1	2	3	4÷9
A	B,no	A,no	A,no	A,no
B	B,no	C,no	A,no	A,no
C	B,no	A,no	A,si	A,no



Classificazione delle FSM

N° di stati interni:

0 o 1 — **Macchina combinatoria**

2 o più — **Macchina sequenziale**

N° di simboli d'uscita per simbolo d'ingresso:

1 — **Macchina sequenziale asincrona**

2 o più — **Macchina sequenziale sincrona**

Evento che può modificare l'uscita

- **modifica dell'ingresso**
- **modifica dello stato ad ogni** ma come misurarlo?

Esempi

Il relè ad autoritenuta è una macchina **asincrona**:
MARCIA, finché è premuto, produce passaggio di corrente
ARRESTO , finché è premuto, impedisce il passaggio di corrente
MARCIA e ARRESTO, finché non sono premuti, determinano o passaggio o assenza di corrente.
N.B. due effetti per una sola causa, quindi è una macchina sequenziale; la durata dell'ingresso non influisce, quindi è una macchina asincrona

Il semaforo è una **macchina sincrona**:
Il GIALLO sostituisce il VERDE solo dopo che è trascorsa una prefissata quantità di tempo.
Il ROSSO sostituisce il GIALLO solo dopo che è trascorsa una prefissata quantità di tempo.
Il VERDE sostituisce il ROSSO solo dopo che è trascorsa una prefissata quantità di tempo.
N.B. effetti diversi a istanti successivi e senza modifica dell'ingresso, quindi è una macchina sequenziale sincrona

Macchine asincrone e sincrone

Macchina asincrona - **Lo stato e l'uscita possono cambiare solo se cambia l'ingresso.**
La "durata" dell'ingresso non produce informazione.
Ogni stato diventa "stabile" per l'ingresso che lo ha causato
" se s*=G(s,i) allora anche s*=G(s*,i)"

Macchina sincrona - **Lo stato e l'uscita possono cambiare solo allo scadere di un prefissato intervallo di tempo T_0**
(*istanti di sincronismo* $t = T_0, 2T_0, 3T_0, ..$).
Ipotesi: durante l'intervallo l'ingresso è costante

$$u^n = F(s^n, i^n)$$

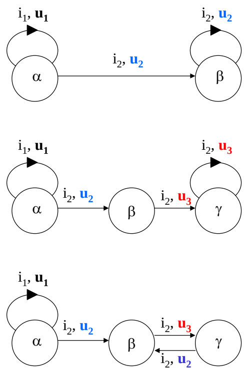
$$s^{n+1} = s^{*n} = G(s^n, i^n)$$

L'intervallo compreso tra due successivi istanti di sincronismo è l'unità di misura del tempo.

Grafo di comportamenti asincroni e sincroni

Macchina asincrona: ogni nuovo ingresso produce subito una stabilità e genera quindi un solo nuovo simbolo d'uscita

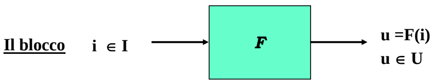
Macchina sincrona: un nuovo ingresso produce una sequenza, finita o periodica, di transizioni di stato e di simboli d'uscita



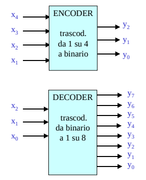
3.2 - La macchina combinatoria

Macchina combinatoria "ideale": la funzione

<u>Elaborazione combinatoria</u>: per ogni i $\in$ I esiste un solo u $\in$ U che gli corrisponde. NON c'è MEMORIA, NON c'è RETROAZIONE



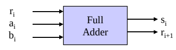
Encoder e Decoder



x_4 x_3 x_2 x_1	y_2 y_1 y_0
0 0 0 0	0 0 0
0 0 0 1	0 0 1
0 0 1 0	0 1 0
0 1 0 0	0 1 1
1 0 0 0	1 0 0

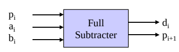
x_2 x_1 x_0	y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1 y_0
0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 1	0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0	0 0 0 0 0 1 0 0
0 1 1	0 0 0 0 1 0 0 0
1 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0
1 0 1	0 0 1 0 0 0 0 0
1 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0
1 1 1	1 0 0 0 0 0 0 0

Full Adder



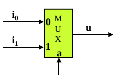
r_i a_i b_i	r_{i+1}	s_i
0 0 0	0	0
0 0 1	0	1
0 1 0	0	1
0 1 1	1	0
1 0 0	0	1
1 0 1	1	0
1 1 0	1	0
1 1 1	1	1

Full Subtracter



p_i a_i b_i	p_{i+1}	d_i
0 0 0	0	0
0 0 1	1	1
0 1 0	0	1
0 1 1	0	0
1 0 0	1	1
1 0 1	1	0
1 1 0	0	0
1 1 1	1	1

Il Multiplexer a due vie



a	i_0	i_1	u
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

***se* a=0 *allora* u=i_0**
***altrimenti* u=i_1**

Descrizione del comportamento

<u>La tabella</u>
i: var. indipendente
u: var. dipendente

i	u = F(i)
a_1	b_2
a_2	b_3
a_3	b_2
a_4	b_3
a_5	b_1

$B^n \rightarrow B^m$

<u>L'espressione</u>

ADDER: u = $i_1 + i_2$

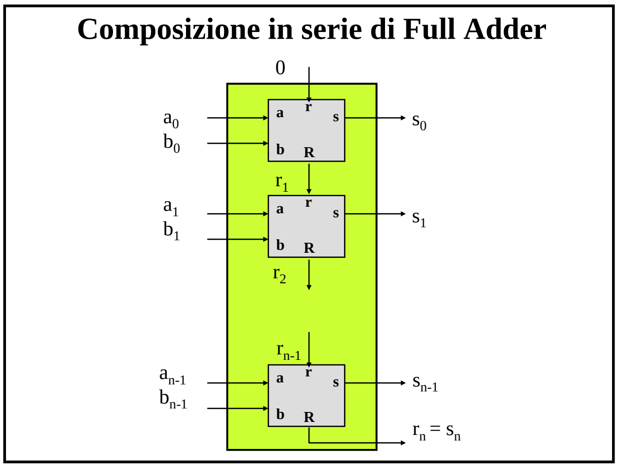
SELETTORE: u = i_A

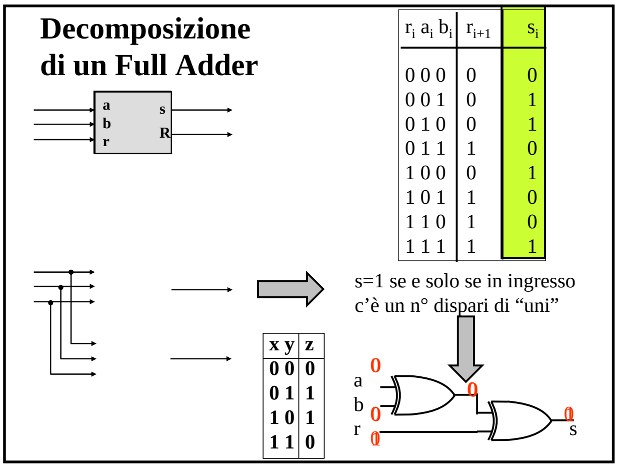
Algebra binaria

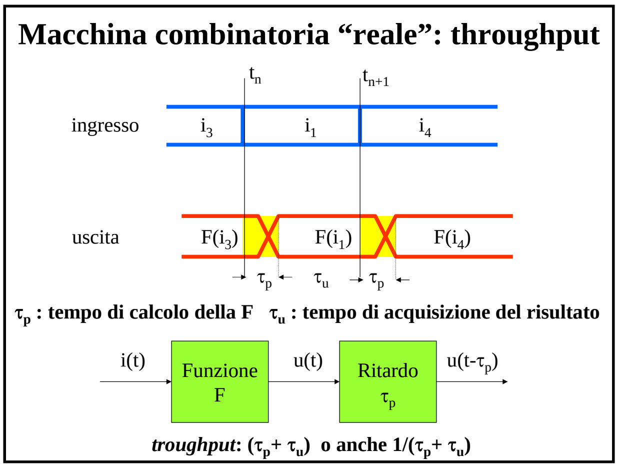
Struttura: composizione e decomposizione

La composizione in serie e/o in parallelo di macchine combinatorie è ancora una macchina combinatoria

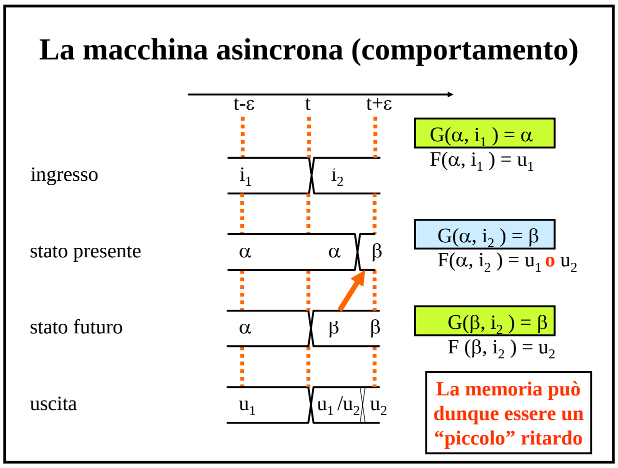
Ogni macchina combinatoria può essere decomposta fino ad individuare una disposizione in serie/parallelo di gate

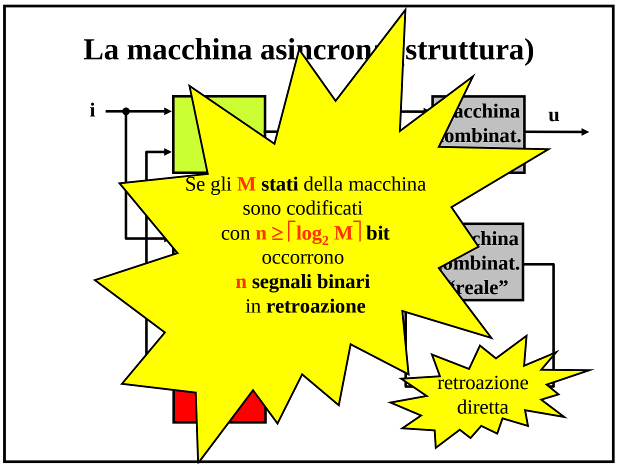

Composizione in serie di Full Adder
0
a_0 b_0 s_0
r_1
a_1 b_1 s_1
r_2
r_{n-1}
a_{n-1} b_{n-1} s_{n-1}
$r_n = s_n$
a b r s R


Decomposizione
di un Full Adder
r_i a_i b_i | r_{i+1} | s_i
0 0 0 | 0 | 0
0 0 1 | 0 | 1
0 1 0 | 0 | 1
0 1 1 | 1 | 0
1 0 0 | 0 | 1
1 0 1 | 1 | 0
1 1 0 | 1 | 0
1 1 1 | 1 | 1
s=1 se e solo se in ingresso
c'è un n° dispari di "uni"
x y | z
0 0 | 0
0 1 | 1
1 0 | 1
1 1 | 0
a b r s

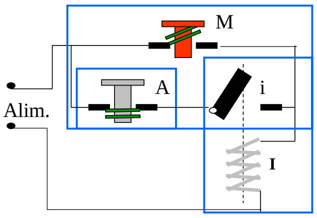

Macchina combinatoria "reale": throughput
t_n t_{n+1}
ingresso i_3 i_1 i_4
uscita $F(i_3)$ $F(i_1)$ $F(i_4)$
τ_p τ_u τ_p
τ_p : tempo di calcolo della F τ_u : tempo di acquisizione del risultato
i(t) Funzione F u(t) Ritardo τ_p $u(t-\tau_p)$
troughput: $(\tau_p + \tau_u)$ o anche $1/(\tau_p + \tau_u)$


3.2
La macchina
asincrona


La macchina asincrona (comportamento)
t-ε t t+ε
ingresso i_1 i_2
stato presente α α β
stato futuro α β β
uscita u_1 u_1 /u_2 u_2
$G(\alpha, i_1) = \alpha$
$F(\alpha, i_1) = u_1$
$G(\alpha, i_2) = \beta$
$F(\alpha, i_2) = u_1$ o u_2
$G(\beta, i_2) = \beta$
$F(\beta, i_2) = u_2$
La memoria può dunque essere un "piccolo" ritardo


La macchina asincrona (struttura)
i u
Se gli M stati della macchina
sono codificati
con $n \geq \lceil \log_2 M \rceil$ bit
occorrono
n segnali binari
in retroazione
retroazione
diretta

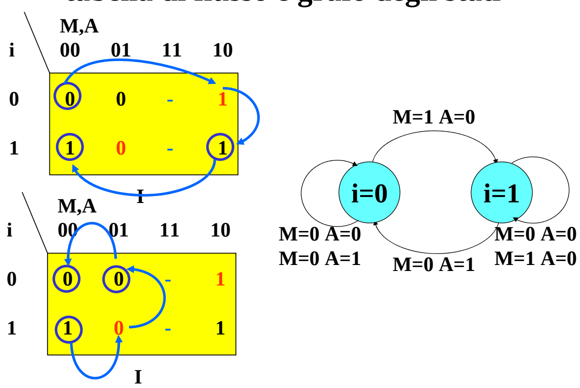
Analisi del relè ad autoritenuta

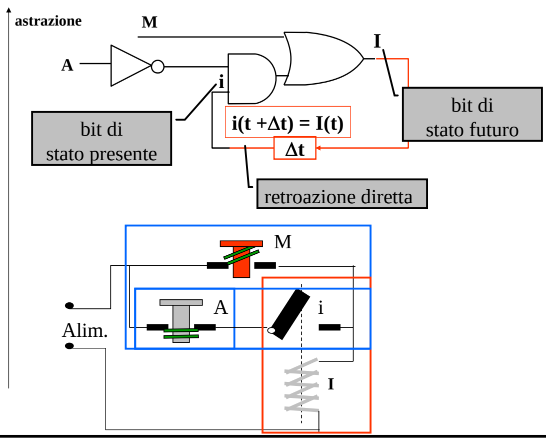


Tabulazione degli esperimenti

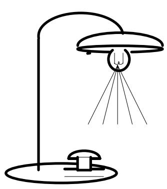
Pulsante M	Pulsante A	Interruttore i	Corrente I	Situazione
		stato presente	stato futuro	
rilasciato 0	rilasciato 0	aperto 0	0 O	*stabile*
rilasciato 0	rilasciato 0	chiuso 1	1 I	*stabile*
premuto 1	rilasciato 0	aperto 0	1 SI	*instabile*
premuto 1	rilasciato 0	chiuso 1	1 I	*stabile*
rilasciato 0	premuto 1	aperto 0	0 O	*stabile*
rilasciato 0	premuto 1	chiuso 1	0 O	*instabile*
premuto 1	premuto 1	aperto 0	- SI	*inutile*
premuto 1	premuto 1	chiuso 1	- SI	*inutile*

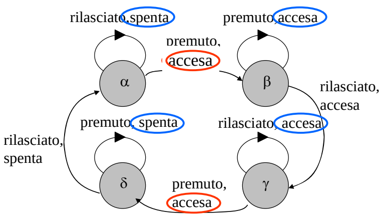
Relè con autoritenuta: tabella di flusso e grafo degli stati





Un esempio di macchina asincrona: la lampada da tavolo





pulsante i ∈ I:{rilasciato,premuto}
lampadina u ∈U:{spenta, accesa}

N.B: durata di una transizione
uscita durante una transizione

	rilasciato	premuto
α	α , spenta	β , accesa
β	γ , accesa	β , accesa
γ	γ , accesa	δ , accesa
δ	α , spenta	δ , spenta

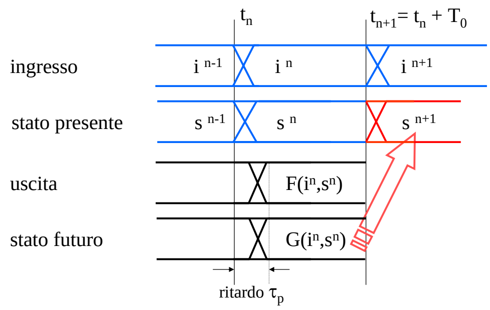
3.3 La macchina sincrona

Segnali sincroni

Per ottenere un'esatta misura del tempo
la modifica dei segnali di ingresso/uscita/stato
deve verificarsi solo in corrispondenza
di **istanti di sincronismo** distanziati
uno dall'altro di una quantità prefissata T_0

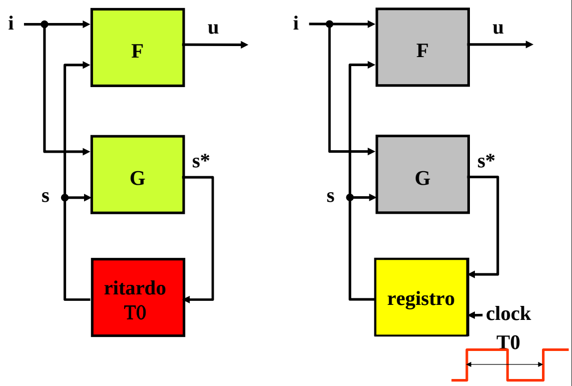
La macchina sincrona

T_0 : intervallo di tempo in cui la macchina non modifica il suo stato



τ_p : intervallo di tempo impiegato dal calcolo di F e di G

La macchina sincrona (struttura)

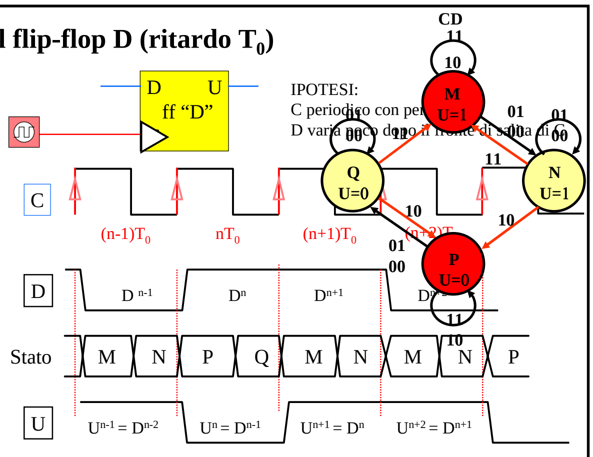


Il registro

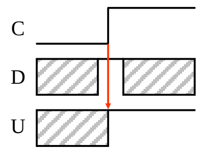
<u>Registro</u> - Macchina sequenziale che memorizza e rende disponibile in uscita un "dato" che in precedenza le è stato fornito in ingresso.
La scrittura di un nuovo "dato" è stabilita da un comando esterno detto "clock".

Il registro
da un bit

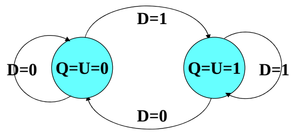
Il flip-flop D (ritardo T_0)



Il flip-flop
genera
un segnale sincrono
anche se le variazioni di D
non sono allineate
con gli istanti di sincronismo.
Basta che D sia costante
al momento
del campionamento

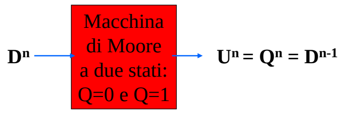


Il flip-flop come macchina sincrona elementare



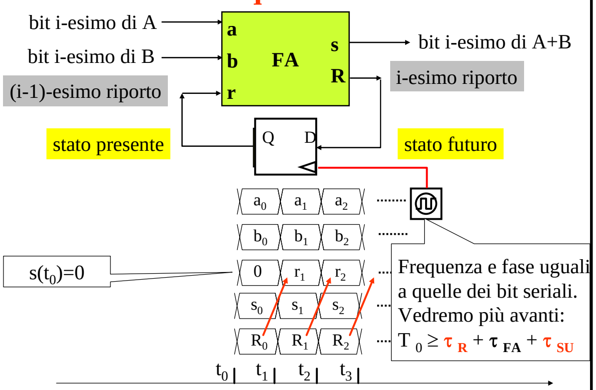
Q^n	$D^n=0$	$D^n=1$
0	0,0	1,0
1	0,1	1,1

Q^{n+1}, U^n

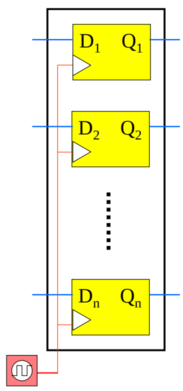


N.B: tempo di percorrenza
di un ramo

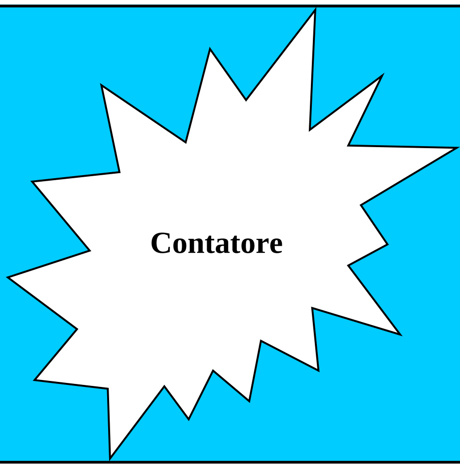
Addizione colonna per colonna:
macchina sequenziale sincrona



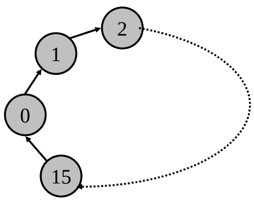
Il registro da n bit



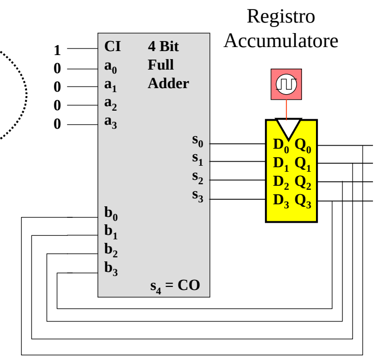
Il dato memorizzato
nel registro
viene sovrascritto
ad ogni fronte del clock



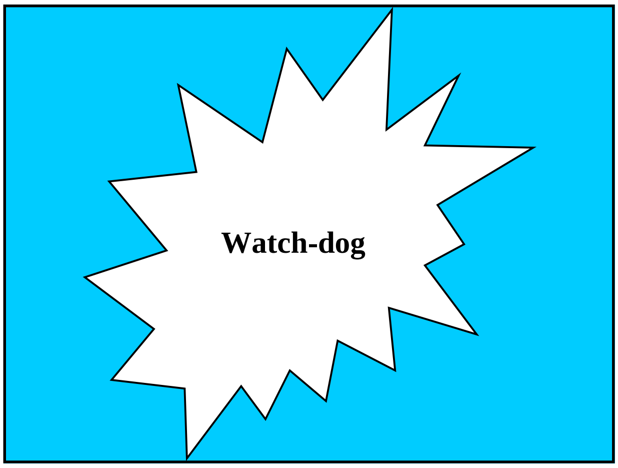
Il contatore binario x16



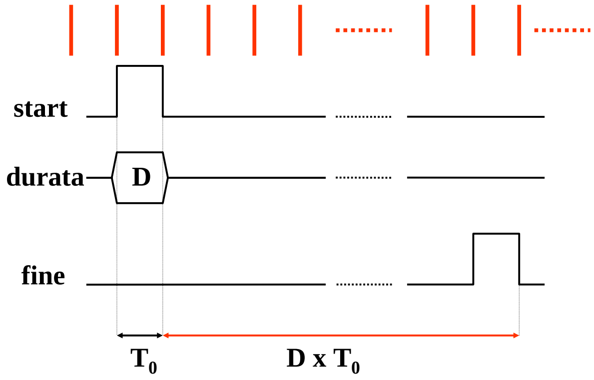
s^n	s^{n+1}
0000	0001
0001	0010
….	….
1110	1111
1111	0000



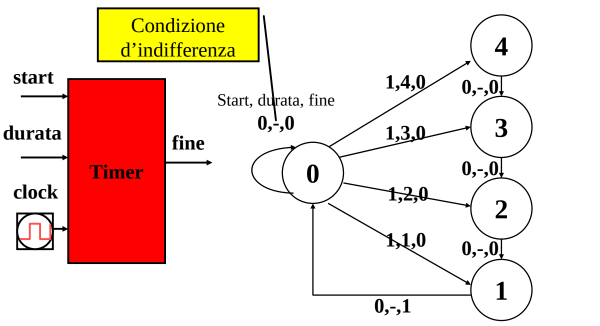
$s^{n+1} = (s+1)^n \bmod 16$



Timer o watch-dog (1)

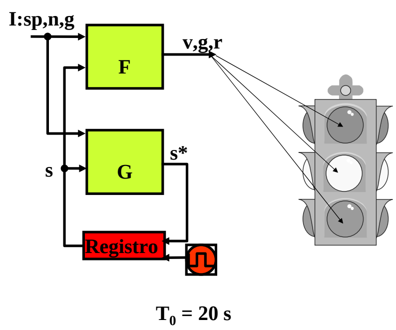


Timer o watch-dog (2)



La macchina usa il periodo del clock come "unità di misura" del tempo.

Il semaforo

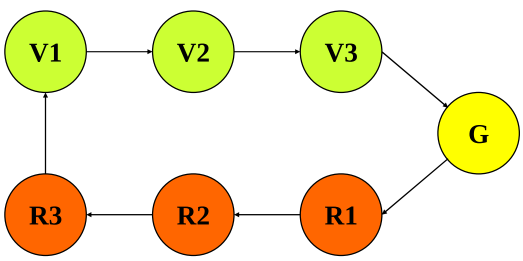


Specifiche:
rosso = 60 s

giallo = 20 s

verde = 60 s

Il grafo degli stati



La tabella di flusso

stato presente	stato futuro	lampada verde	giallo	rosso
V1	V2	accesa	spenta	spenta
V2	V3	accesa	spenta	spenta
V3	G	accesa	spenta	spenta
G	R1	spenta	accesa	spenta
R1	R2	spenta	spenta	accesa
R2	R3	spenta	spenta	accesa
R3	V1	spenta	spenta	accesa

La macchina sequenziale per il semaforo

Stato interno

s = $y_2y_1y_0$ (7 stati)

Uscita

u = $z_1z_2z_3$ (codice 1 su 3)

Comportamento:

$s_2 \leftarrow (s+1)_2$ mod 7

u ← F(s)

Contatore da "zero" a "sei"

s^n	u^n
0 0 0	1 0 0
0 0 1	1 0 0
0 1 0	1 0 0
0 1 1	0 1 0
1 0 0	0 0 1
1 0 1	0 0 1
1 1 0	0 0 1

s^n	s^{n+1}
0 0 0	0 0 1
0 0 1	0 1 0
0 1 0	0 1 1
0 1 1	1 0 0
1 0 0	1 0 1
1 0 1	1 1 0
1 1 0	0 0 0