LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita ***ricorsivamente*** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa

- La ricorsione consiste nella possibilità di ***definire una funzione in termini di se stessa***

- È basata sul *principio di induzione* matematica:
  - se una proprietà P vale per $n=n_0$ ⇒ CASO BASE
  - e si può provare che, ***assumendola valida per n***, allora vale per n+1

  allora P vale per ogni $n \geq n_0$

LA RICORSIONE

Operativamente, risolvere un problema con un ***approccio ricorsivo*** comporta

- **di identificare un "caso base"**, con soluzione nota
- di riuscire a **esprimere la soluzione al caso generico *n* in termini dello *stesso problema* *in uno o più casi più semplici*** (n-1, n-2, etc.)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Esempio: il fattoriale di un numero

```
fact(n) = n!
n!: Z → N
   n! vale 1              se n ≤ 0
   n! vale n*(n-1)!       se n > 0
```

Codifica:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
int main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fact() una copia del valore così ottenuto (3)

fact(3) effettuerà poi analogamente una nuova chiamata di funzione fact(2)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
int main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Analogamente, fact(2) effettua una nuova chiamata di funzione. ***n-1 nell'environment di fact() vale 1 quindi viene chiamata*** `fact(1)`

E ancora, analogamente, per `fact(0)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
int main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. ***La condizione n <=0 è vera e la funzione*** `fact(0)` ***torna come risultato 1 e termina***

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
int main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(1)` ***che può valutare l'espressione n * 1 ottenendo come risultato 1 e terminando***

E analogamente per fact(2) e fact(3)

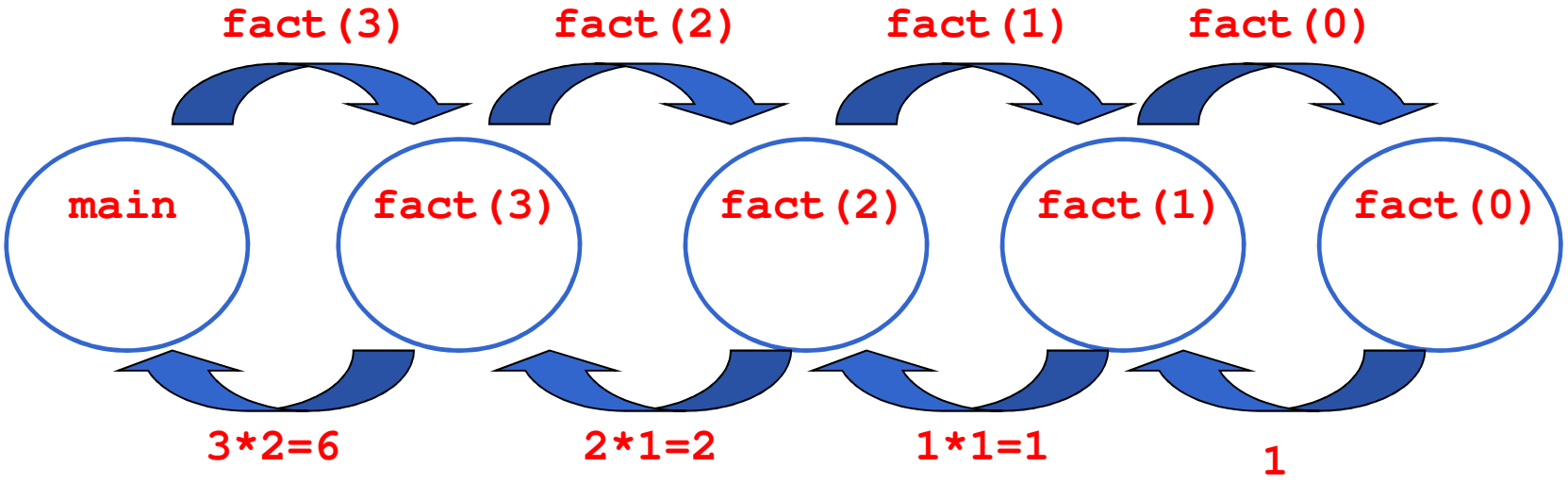
LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
int main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

il controllo passa infine al main che assegna a fz il valore 6

LA RICORSIONE: ESEMPIO



main	fact(3)= 3 * fact(2)= 2 * fact(1) = 1 *fact(0)			
Cliente di fact(3)	Cliente di fact(2) Servitore del main	Cliente di fact(1) Servitore di fact(3)	Cliente di fact(0) Servitore di fact(2)	Servitore di fact(1)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Specifica:

Considera la somma 1+2+3+...+(N-1)+N come composta di due termini:

- (1+2+3+...+(N-1)) → ***Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi***
- N → ***Valore noto***

Esiste un caso banale ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Algoritmo ricorsivo

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della somma dei primi N-1 interi

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n){
 if (n==1) return 1;
     else return sommaFinoA(n-1)+n;
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LA RICORSIONE: ESEMPIO

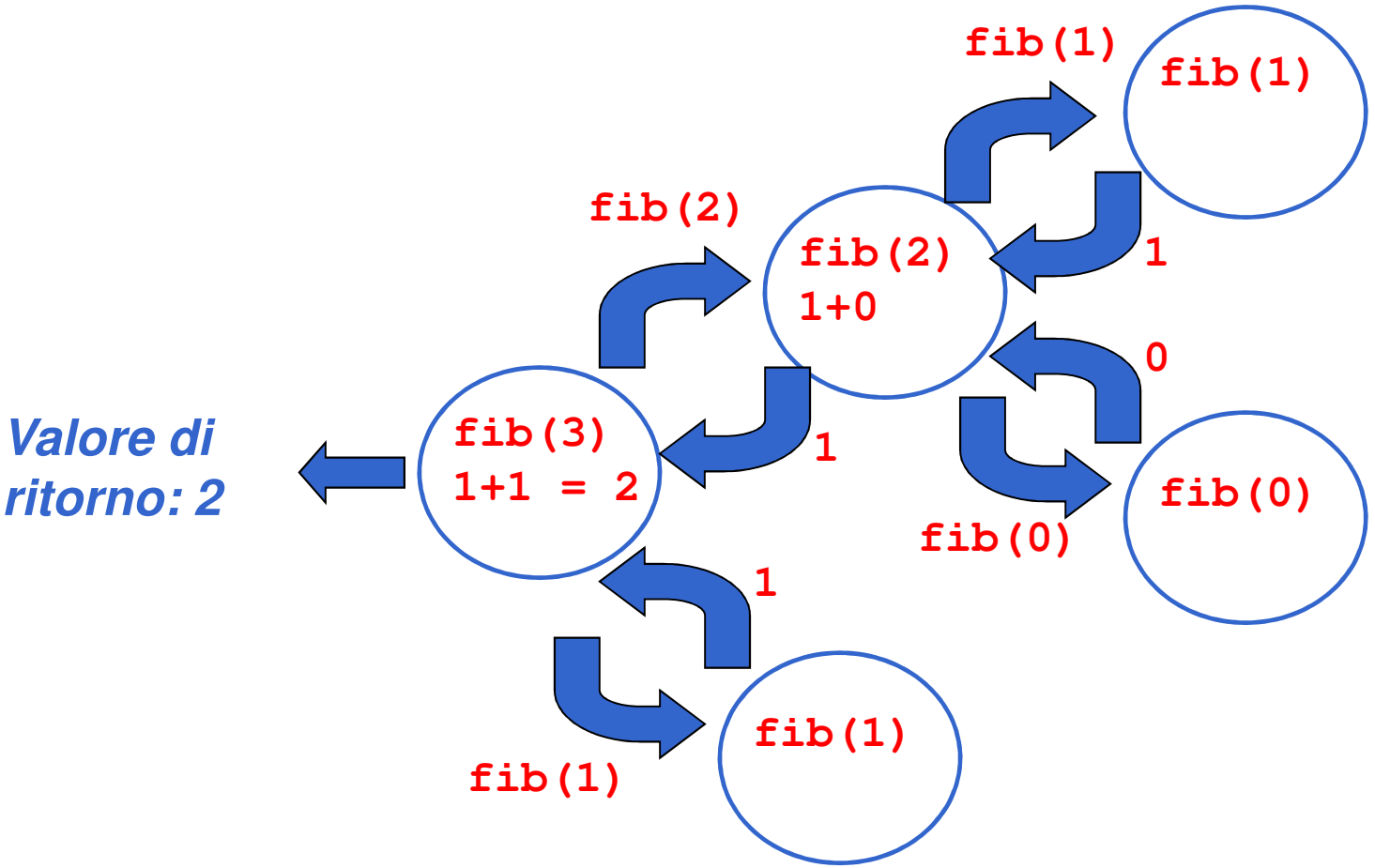
Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {
  if (n<2) return n;
  else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
}
```

***Ricorsione non lineare**: ogni invocazione del servitore causa due nuove chiamate al servitore medesimo*

RICORSIONE NON LINEARE: ESEMPIO



UNA RIFLESSIONE

Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato **SOLO DOPO** che si sono aperte tutte le chiamate, *"a ritroso"*, mentre le chiamate si chiudono

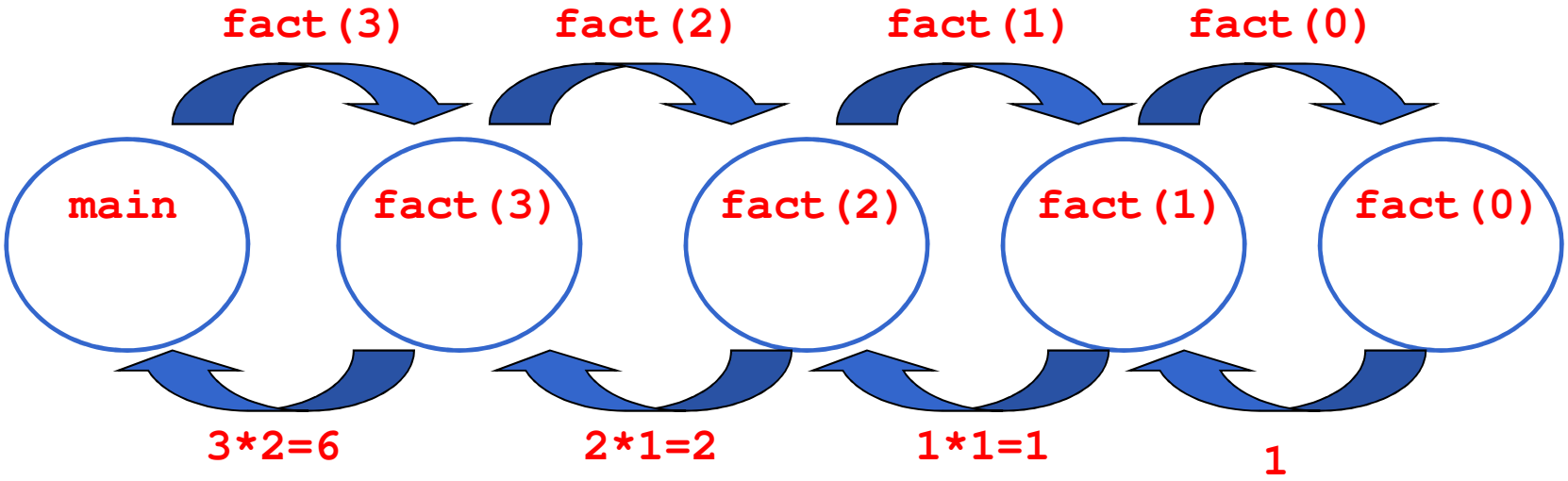
> *Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema,* ***ma non calcolano nulla***

Il risultato viene sintetizzato *a partire dalla fine, perché prima occorre arrivare al caso "banale"*:

- il caso "banale" fornisce il valore di partenza
- poi si sintetizzano, "a ritroso", i successivi risultati parziali

Processo computazionale effettivamente ricorsivo

LA RICORSIONE



PASSI:

1) **`fact(3)`** chiama **`fact(2)`** passandogli il controllo
2) **`fact(2)`** calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
3) **`fact(3)`** riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione 3*2
4) termina anche **`fact(3)`** e torna il controllo al main

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *"in avanti"*
- Ogni processo computazionale che computi "in avanti", per accumulo, costituisce una ***ITERAZIONE***, ossia è un *processo computazionale iterativo*
- La caratteristica fondamentale di un **processo computazionale *ITERATIVO* è che *a ogni passo è disponibile un risultato parziale***
  - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
  - questo ***non è vero*** **nei processi computazionali *ricorsivi,*** in cui nulla è disponibile fino al caso elementare

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 * \ldots * k$**:**

$$1! = v_1 = 1$$

$$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1) * v_k \qquad \textit{per } k \geq 1$$

$$n! = v_n \qquad \textit{per } k = n$$

FATTORIALE ITERATIVO

Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
      int i=1;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      while (i <= n)
            { F=F*i;
              i=i+1; }
      return F;
      }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

La variabile F accumula risultati intermedi: se n = 3 inizialmente `F=1`, *poi al primo ciclo* `F=1`, *poi al secondo ciclo* `F` *assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo* `i=3` *e* `F` *assume il valore 6*

- Al primo passo F accumula il fattoriale di 1
- Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2
- Al passo i-esimo F accumula il fattoriale di i

FUNZIONI: IL MODELLO A RUN-TIME

Ogni volta che viene invocata una funzione:

- si crea una ***nuova attivazione (istanza)*** del servitore
- viene ***allocata la memoria*** per i parametri e per le variabili locali
- si effettua il passaggio dei parametri
- si trasferisce il controllo al servitore
- si esegue il codice della funzione

IL MODELLO A RUN-TIME: ENVIRONMENT

- La definizione di una funzione introduce un ***nuovo binding*** nell'environment in cui la funzione è definita

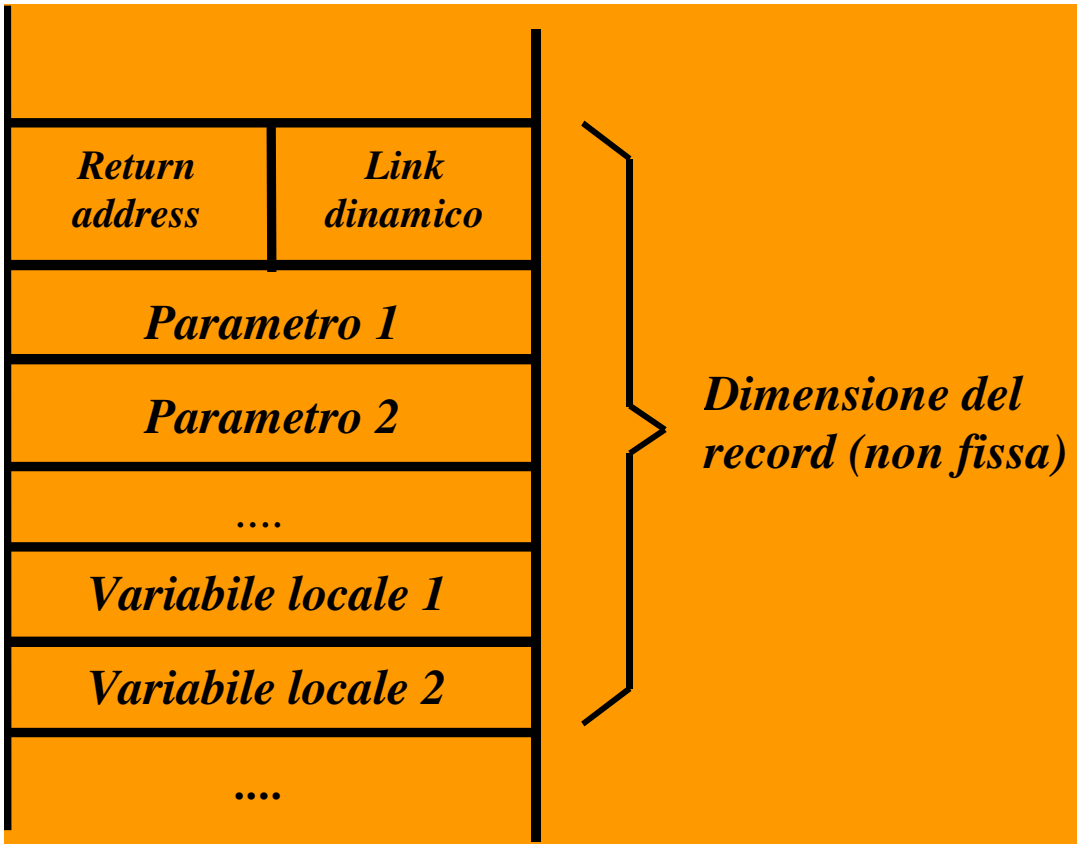
- Al momento dell'*invocazione*, viene creata una **struttura dati che contiene i *binding* dei parametri e degli identificatori definiti localmente** alla funzione detta ***RECORD DI ATTIVAZIONE***

RECORD DI ATTIVAZIONE

È il "*mondo della funzione*": *contiene tutto ciò che ne caratterizza l'esistenza*

- **i parametri ricevuti**
- **le variabili locali**
- **l'indirizzo di ritorno (*Return Address RA*)** che indica il punto a cui tornare (nel codice del cliente) al termine della funzione, per permettere al cliente di proseguire una volta che la funzione termina
- **un collegamento al record di attivazione del cliente (*Dynamic Link DL*)**

RECORD DI ATTIVAZIONE



RECORD DI ATTIVAZIONE

- Rappresenta il "*mondo della funzione*": *nasce e muore con essa*
  - è ***creato*** al momento della ***invocazione*** di una funzione
  - ***permane*** per tutto il tempo in cui la funzione è in ***esecuzione***
  - è distrutto (***deallocato***) al termine dell'esecuzione della funzione stessa
- Ad **ogni chiamata** di funzione viene ***creato un nuovo record***, *specifico per quella chiamata di quella funzione*
- La dimensione del record di attivazione
  - varia da una funzione all'altra
  - *per una data funzione, è fissa e calcolabile a priori*

RECORD DI ATTIVAZIONE

Funzioni che chiamano altre funzioni danno luogo a una ***sequenza*** **di record di attivazione**

- allocati secondo l'ordine delle chiamate
- deallocati in ordine inverso

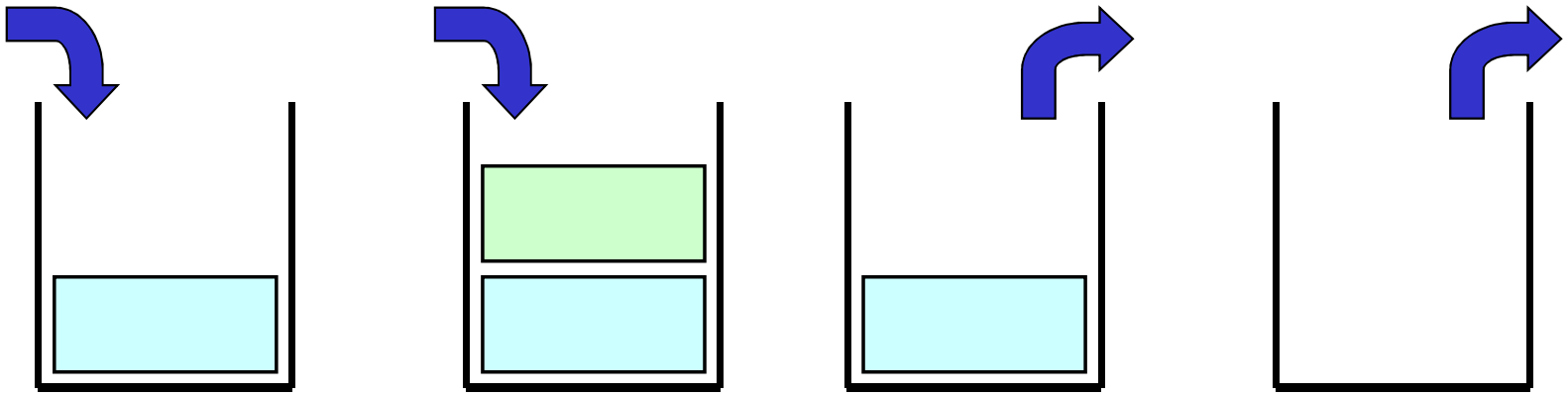
La sequenza dei link dinamici costituisce la cosiddetta *catena dinamica*, che rappresenta *la storia delle attivazioni ("chi ha chiamato chi")*

RECORD DI ATTIVAZIONE

Per catturare la semantica delle chiamate annidate (una funzione che chiama un'altra funzione che...), l'area di memoria in cui vengono allocati i record di attivazione deve essere gestita *come una pila*

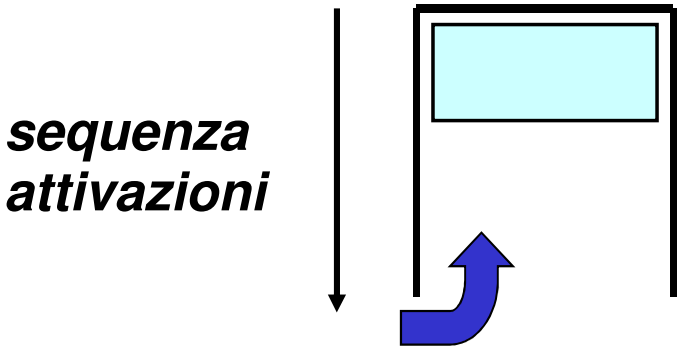
STACK

Una struttura dati gestita con politica LIFO (Last In, First Out - l'ultimo a entrare è il primo a uscire)

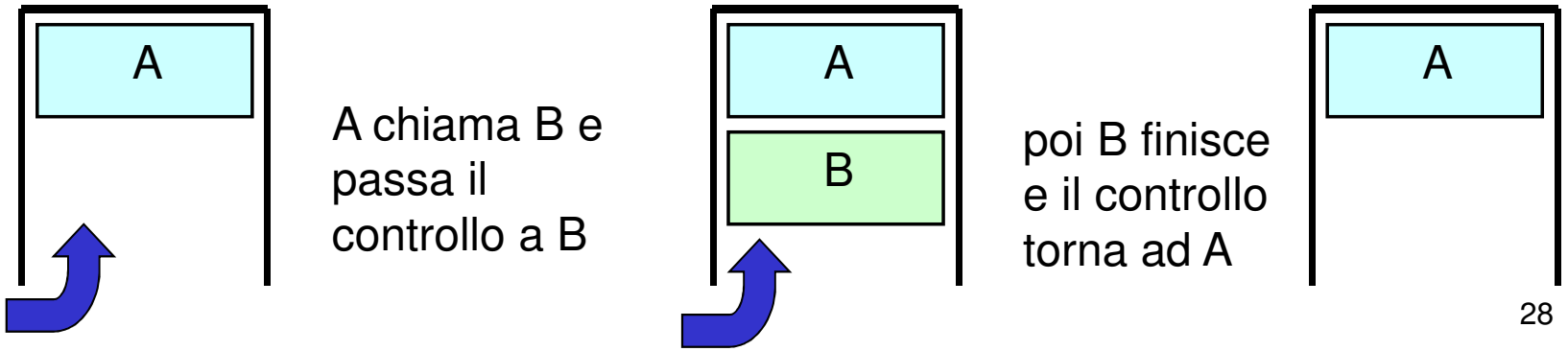


RECORD DI ATTIVAZIONE

Normalmente lo STACK dei record di attivazione si disegna nel modo seguente



Quindi, se la funzione A chiama la funzione B lo stack evolve nel modo seguente



ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Programma:

```
int R(int A) { return A+1; }
int Q(int x) { return R(x); }
int P(void) { int a=10; return Q(a); }
int main() { int x = P(); }
```

Sequenza chiamate:

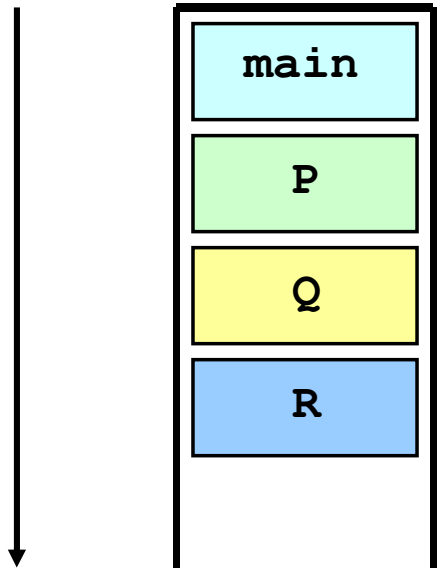
SO → `main` → `P()` → `Q()` → `R()`

ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Sequenza chiamate:

SO → `main` → `P()` → `Q()` → `R()`

sequenza attivazioni



ESEMPIO: FATTORIALE

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1
    else return n*fact(n-1);
                        }

int main(){
    int x, y;
    x = 2;
    y = fact(x);
}
```

NOTA: anche **`main()`** è una funzione

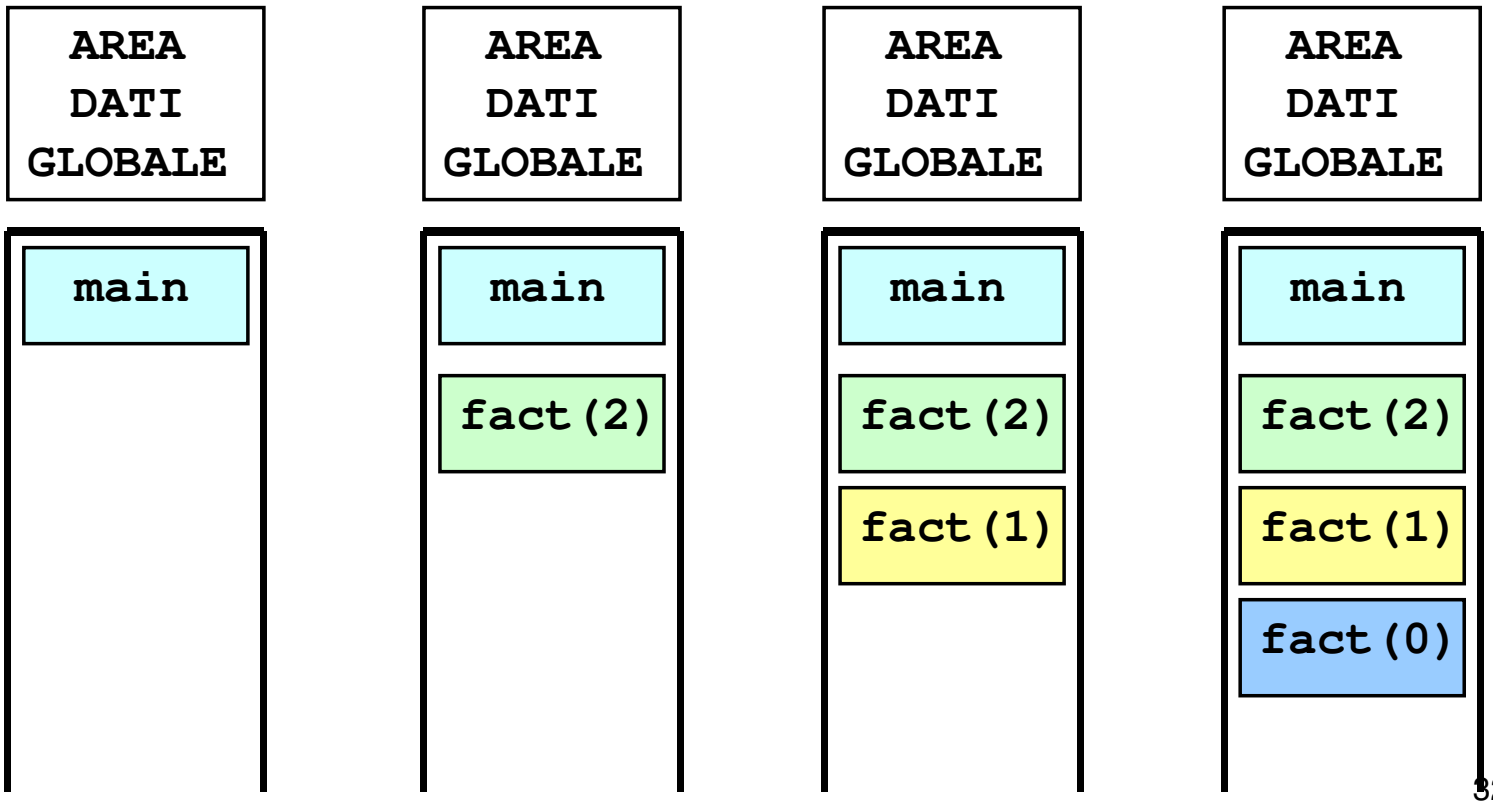
ESEMPIO: FATTORIALE

Situazione all'inizio dell'esecuzione del `main()`

`main()` chiama `fact(2)`

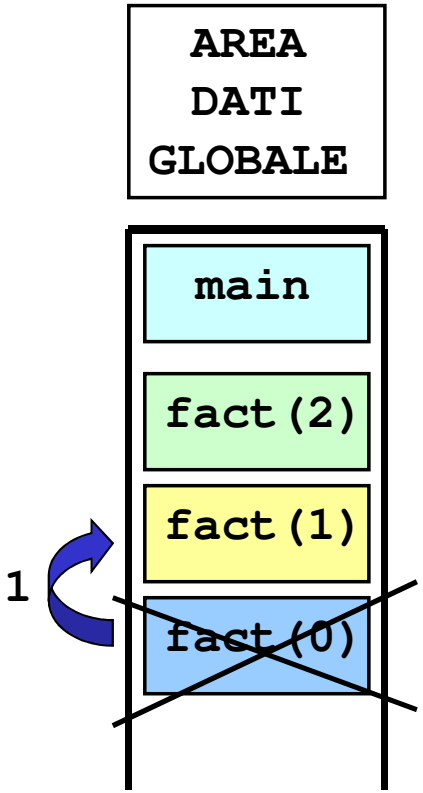
`fact(2)` chiama `fact(1)`

`fact(1)` chiama `fact(0)`

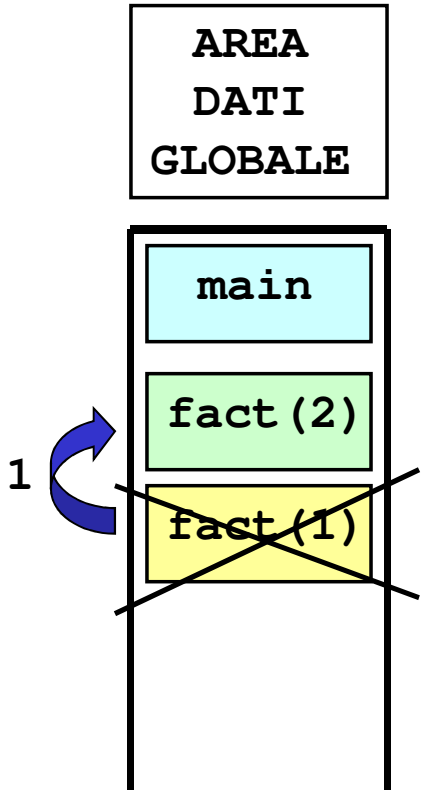


ESEMPIO: FATTORIALE

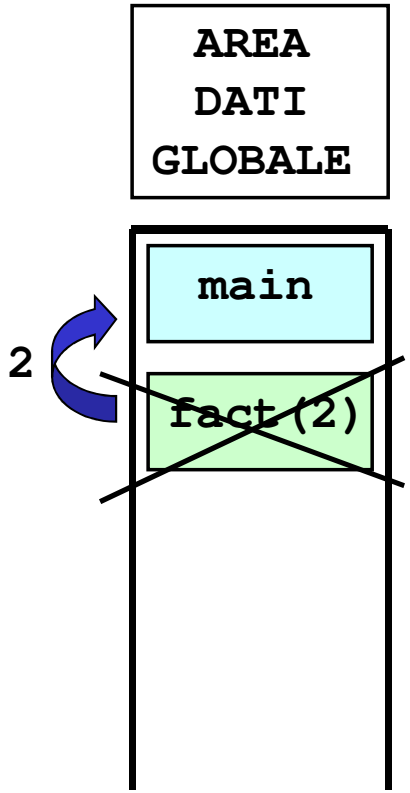
`fact(0)` termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(1)`



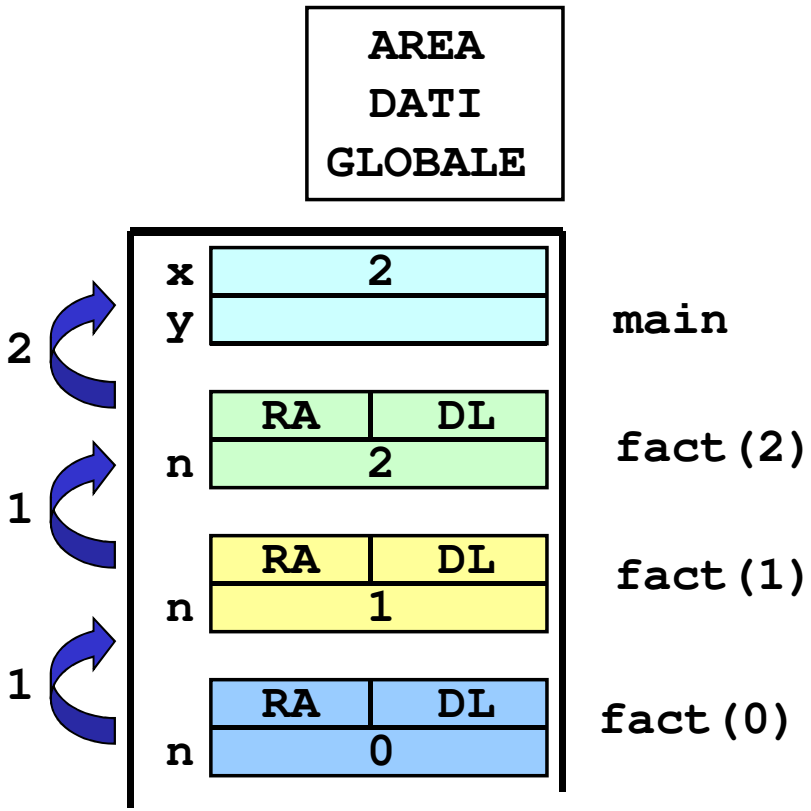
`fact(1)` effettua la moltiplicazione e termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(2)`



`fact(1)` effettua la moltiplicazione e termina restituendo il valore 2. Il controllo torna al `main()`



RECORD DI ATTIVAZIONE IN DETTAGLIO



RICORSIONE vs. ITERAZIONE

A volte processi computazionali ***ricorsivi*** rispecchiano meglio il problema e/o la ***soluzione del problema*** (ad es. *strutture dati ricorsive* quali liste - le vedremo nel dettaglio più avanti…)

MA:

nei processi computazionali ***ricorsivi*** ogni funzione che effettua una chiamata ricorsiva deve ***aspettare il risultato del servitore*** per ***effettuare operazioni su questo***; solo ***in seguito può terminare***

→ ***Maggiore occupazione di memoria per record attivazione*** a meno di "ottimizzazioni" da parte del compilatore (*tail recursion optimization* non presente in C e Java, ma utilizzata in Prolog)