ALGORITMI DI ORDINAMENTO

- **Scopo:** ***ordinare una sequenza di elementi*** **in base a una certa** ***relazione d'ordine***
  - **lo scopo finale è ben definito** → ***algoritmi equivalenti***
  - **diversi algoritmi possono avere** ***efficienza assai diversa***
- **Ipotesi:**
  gli elementi siano memorizzati in un array.

ALGORITMI DI ORDINAMENTO

Principali algoritmi di ordinamento:

- ***naïve sort*** (semplice, intuitivo, poco efficiente)
- ***bubble sort*** (semplice, un po' più efficiente)
- ***insert sort*** (intuitivo, abbastanza efficiente)
- ***merge sort*** (non intuitivo, molto efficiente)
- ***quick sort*** (non intuitivo, alquanto efficiente)

Per "misurare le prestazioni" di un algoritmo, conteremo quante volte viene svolto il ***confronto fra elementi dell'array.***

==> *Studio della Complessità: non lo tratteremo formalmente*

Algoritmi di Ordinamento

- Si supponga definita la funzione che segue

```
void scambia(int *a, int *b)
{
    int tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}
```

NAÏVE SORT

- **Molto intuitivo e semplice, è il primo che viene in mente**

  Specifica (sia `n` la dimensione dell'array `v`)

  `while (`*<array non vuoto>*`) {`

    <trova la posizione `p` del massimo>

    `if (p<n-1)` *<scambia `v[n-1]` e `v[p]` >*

    /* invariante: v[n-1] contiene il massimo */

    <restringi l'attenzione alle prime `n-1` caselle dell' array, ponendo `n'` = `n-1` >

  `}`

NAÏVE SORT

Codifica

```
void naiveSort(int v[], int n){
 int p;
 while (n>1) {
   p = trovaPosMax(v,n);
   if (p<n-1) scambia(&v[p],&v[n-1]);
   n--;
 }
}
```

La dimensione dell'array cala di 1 a ogni iterazione

NAÏVE SORT

Codifica

```
int trovaPosMax(int v[], int n){
  int i, posMax=0;
  for (i=1; i<n; i++)
    if (v[posMax]<v[i]) posMax=i;
  return posMax;
}
```

All'inizio si assume v[0] come max di tentativo.

Si scandisce l'array e, se si trova un elemento maggiore del max attuale, lo si assume come nuovo max, memorizzandone la posizione.

NAÏVE SORT

<u>*Valutazione di complessità*</u>

- Il numero di *confronti* necessari vale <u>*sempre*</u>:

$$(N-1) + (N-2) + (N-3) + \ldots + 2 + 1 =$$
$$= N*(N-1)/2 = O(N^2/2)$$ **(interpretiamo O come proporzionale)**

- *Nel caso peggiore*, questo è anche il numero di scambi necessari (in generale saranno meno)
- ***Importante*: la "complessità" non dipende dai particolari dati di ingresso**
  - **l'algoritmo fa gli stessi confronti sia per un array disordinato, sia per un array *già ordinato!!***

BUBBLE SORT (ordinamento a bolle)

- **Corregge il difetto principale del naïve sort: quello di *non accorgersi se l'array, a un certo punto, è già ordinato.***
- **Opera per *"passate successive"* sull'array:**
  - **a ogni iterazione, considera una ad una *tutte le possibili coppie di elementi adiacenti*, scambiandoli se risultano nell'ordine errato**
  - **così, dopo ogni iterazione, l'elemento massimo è in fondo alla parte di array considerata**
- **Quando non si verificano scambi, l'array è ordinato, e l'algoritmo termina.**

BUBBLE SORT

Codifica

```
void bubbleSort(int v[], int n){
  int i, ordinato = 0;
  while (n>1 && !ordinato){
    ordinato = 1;
    for (i=0; i<n-1; i++)
      if (v[i]>v[i+1]) {
        scambia(&v[i],&v[i+1]);
        ordinato = 0; }
    n--;
  }
}
```

BUBBLE SORT

Esempio

0	6	4	4	4
1	4	6	6	6
2	7	7	7	2
3	2	2	2	7

Iª passata (dim. = 4)
al termine, 7 è a posto.

0	4	4	4
1	6	6	2
2	2	2	6

IIª passata (dim. = 3)
al termine, 6 è a posto.

0	4	2
1	2	4

IIIª passata (dim. = 2)
al termine, 4 è a posto.

0	2
1	4
2	6
3	7

array ordinato

BUBBLE SORT

Valutazione di complessità

- Caso peggiore: numero di *confronti* identico al precedente → **$O(N^2/2)$**
- ***Nel caso migliore, però, basta una sola passata***, con N-1 confronti → **$O(N)$**
- *Nel caso medio,* i confronti saranno compresi fra N-1 e $N^2/2$, a seconda dei dati di ingresso.

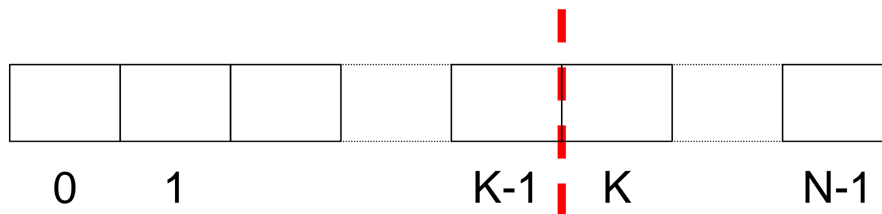
INSERT SORT

- **Per ottenere un array ordinato basta *costruirlo ordinato, inserendo gli elementi al posto giusto fin dall'inizio.***
- **Idealmente, il metodo costruisce un nuovo array, contenente gli stessi elementi del primo, ma ordinato.**
- **In pratica, *non è necessario costruire un secondo array,* in quanto le stesse operazioni possono essere svolte direttamente sull'array originale: così, alla fine esso risulterà ordinato.**

INSERT SORT

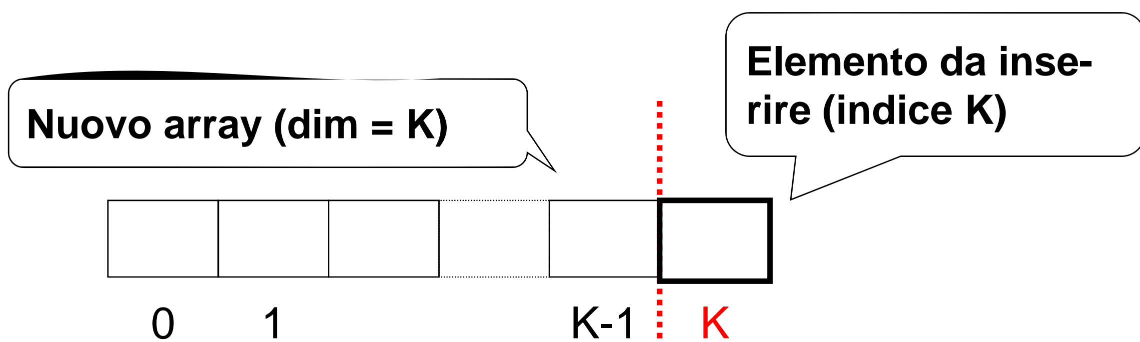
Scelta di progetto

- ***"vecchio" e "nuovo" array condividono lo stesso array fisico di N celle (da 0 a N-1)***
- ***in ogni istante, le prime K celle (numerate da 0 a K-1) costituiscono il nuovo array***
- ***le successive N-K celle costituiscono la parte residua dell'array originale***



INSERT SORT

- Come conseguenza della scelta di progetto fatta, **in ogni istante *il nuovo elemento da inserire si trova nella cella successiva alla fine del nuovo array, cioè* la (K+1)-esima** (il cui indice è K)



INSERT SORT

Specifica

```
for (k=1; k<n; k++)
```

<considera l'elemento di indice k e inseriscilo nel nuovo vettore (da 0 a k) eventualmente spostando in avanti alcuni elementi>

All'inizio (k=1) il nuovo array è la sola prima cella

Codifica

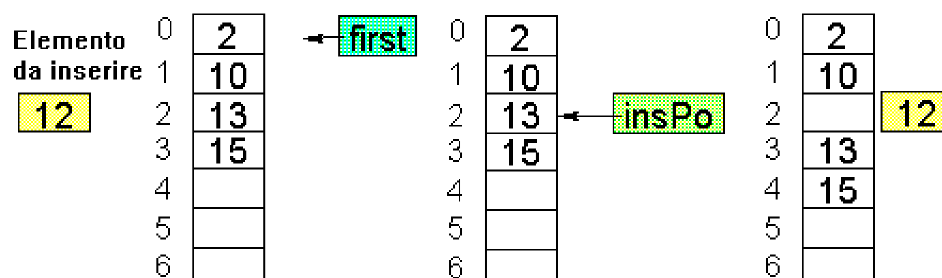
```
void insertSort(int v[], int n){
  int k;
  for (k=1; k<n; k++)
    insOrd(v,k);
}
```

Al passo *k*, la demarcazione fra i due array è alla posizione k

INSERT SORT

Esempio

Scelta di progetto: se il nuovo array è lungo K=4 (numerate da 0 a 3) l'elemento da inserire si trova nella cella successiva (di indice K=4).



INSERT SORT

Specifica di insMinore()

void insOrd(int v[], int pos){

<*determina la posizione in cui va inserito il nuovo elemento*>

<*crea lo spazio spostando gli altri elementi in avanti di una posizione*>

<*inserisci il nuovo elemento alla posizione prevista*>

}

INSERT SORT

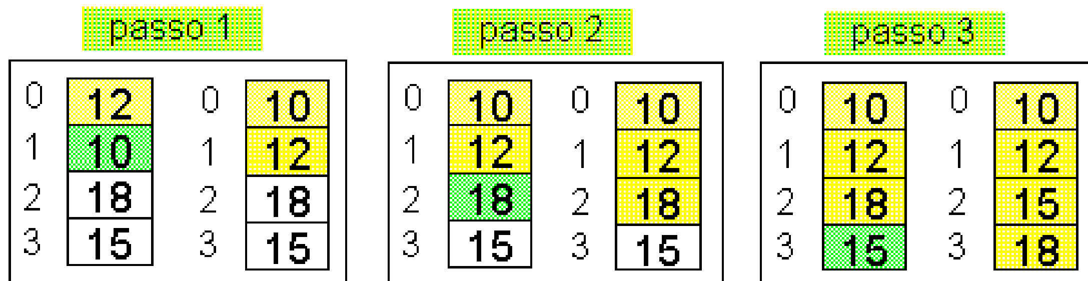
Codifica di insOrd()

```
void insOrd(int v[], int pos){
   int i = pos-1, x = v[pos];
   while (i>=0 && x<v[i]) {
      v[i+1]= v[i]; /* crea lo spazio */
      i--;
   }
   v[i+1]=x;  /* inserisce l'elemento */
}
```

Determina la posizione a cui inserire x

INSERT SORT

Esempio



INSERT SORT

Valutazione di complessità

- *Nel caso peggiore* (array ordinato al contrario), richiede 1+2+3+…+(N-1) confronti e spostamenti → **$O(N^2/2)$**
- *Nel caso migliore* (array già ordinato), bastano solo N-1 confronti (senza spostamenti)
- ***Nel caso medio,*** a ogni ciclo il nuovo elemento viene inserito nella posizione centrale dell'array → 1/2+2/2+…+(N-1)/2 confronti e spostamenti
  Morale: $O(N^2/4)$

QUICK e MERGE SORT

- **Idea base:** ***ordinare un array corto è molto meno costoso che ordinarne uno lungo*.**
- **Conseguenza: può essere utile *partizionare l'array in due parti, ordinarle separatamente*, e infine *fonderle insieme.***

QUICK e MERGE SORT

Algoritmo ricorsivo:

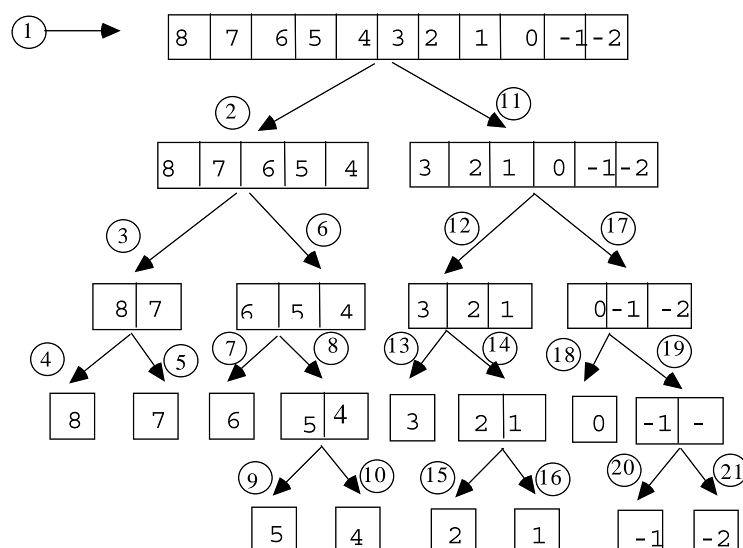
- **i due sub-array ripropongono un problema di ordinamento *in un caso più semplice* (array più corti)**
- **a forza di scomporre un array in sub-array, si giunge a un array di un solo elemento, che è già ordinato (*caso banale*).**

MERGE SORT

- Produce *sempre* due sub-array di egual ampiezza
- *In pratica:*
  - si spezza l'array in due parti *di ugual dimensione*
  - si ordinano separatamente queste due parti
(chiamata ricorsiva)
  - si fondono i due sub-array ordinati così ottenuti in modo da ottenere un unico array ordinato.
- **Il punto cruciale è l'algoritmo di fusione (*merge*) dei due array**

MERGE SORT

Esempio



MERGE SORT

Specifica

```
void mergeSort(int v[], int first, int last,
               int vout[]) {
  if (<array non vuoto>){
   <partiziona l'array in due metà>
   <richiama mergeSort ricorsivamente sui due sub-array,
    se non sono vuoti>
   <fondi in vout i due sub-array ordinati>
  }
}
```

E se avessi messo vout[] come variabile locale?

MERGE SORT

Codifica

```
void mergeSort(int v[], int first, int last,
               int vout[]) {
 int mid;
 if ( first < last ) {
   mid = (last + first) / 2;
   mergeSort(v, first, mid,  vout);
   mergeSort(v, mid+1, last, vout);
   merge(v, first, mid+1, last, vout);
  }
}
```

mergeSort() si limita a suddividere l'array: è merge() che svolge il lavoro

MERGE SORT

Codifica di merge()

```
void  merge(int v[], int i1, int i2,
  int fine, int vout[]){
  int i=i1, j=i2, k=i1;
  while ( i <= i2-1 &&  j <= fine ) {
    if (v[i] < v[j]) vout[k] = v[i++];
    else vout[k] = v[j++];
    k++;
  }
  while (i<=i2-1) { vout[k] = v[i++]; k++; }
  while (j<=fine) { vout[k] = v[j++]; k++; }
  for (i=i1; i<=fine; i++) v[i] = vout[i];
}
```

MERGE SORT

- **Si può dimostrare che $O(N \log_2 N)$ è un limite inferiore alla complessità del *problema dell'ordinamento di un array.***
- **Dunque, *nessun algoritmo, presente o futuro, potrà far meglio di* $O(N \log_2 N)$**
- **MERGE SORT ottiene sempre il caso ottimo $O(N*\log_2 N)$**

Quick Sort

- Come merge-sort, suddivide il vettore in due sotto-array, delimitati da un elemento “sentinella” (***pivot***)
- Il pivot viene spostato in modo opportuno in modo da raggiungere…
- …l’**obiettivo** che è quello di avere nel primo sotto-array solo elementi minori o uguali al pivot, nel secondo sotto-array solo elementi maggiori

QUICK SORT

Struttura dell’algoritmo

- **scegliere un elemento come pivot**
- **partizionare l’array nei due sub-array**
- **ordinarli separatamente (*ricorsione*)**

L’operazione-base è il *partizionamento dell’array nei due sub-array*. Per farla:

- se il primo sub-array ha un elemento > pivot, e il secondo array un elemento < pivot, questi due elementi vengono *scambiati*

Poi si riapplica quicksort ai due sub-array.

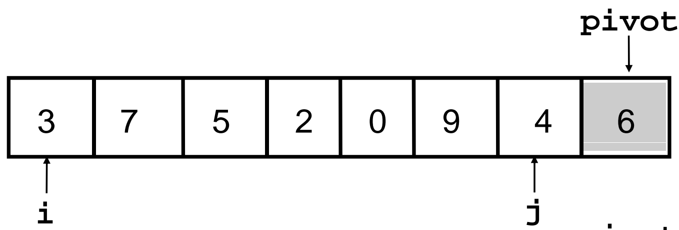
QUICK SORT

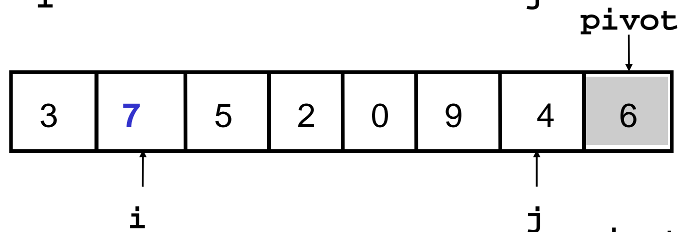
- Si determina arbitrariamente un pivot
  - ad esempio pivot = a[dim - 1]
- Si scandisce il vettore dato mediante due indici:
  - i, che parte da 0 e procede in avanti
  - j, che parte da dim - 1 (dim = dimensione del vettore) e procede all'indietro
- Scansione in avanti:
  - ogni elemento a[i] viene confrontato con il pivot se a[i] > pivot, la scansione in avanti si ferma e si passa alla…
- Scansione all'indietro:
  - ogni elemento a[j] viene confrontato con il pivot se a[j] < pivot, la scansione in indietro si ferma e l'elemento a[j] viene scambiato con a[i]

QUICK SORT

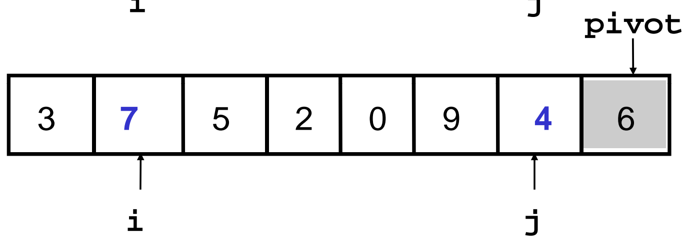
- Poi si riprende con la scansione avanti, indietro, ... Il tutto si ferma quando i == j. A questo punto si scambia a[i] con il pivot
- Alla fine della scansione il pivot è collocato nella sua posizione definitiva
- L'algoritmo è ricorsivo: si richiama su ciascun sotto-array fino a quando non si ottengono sotto-array con un solo elemento
- A questo punto il vettore iniziale risulta ordinato!

QUICK SORT



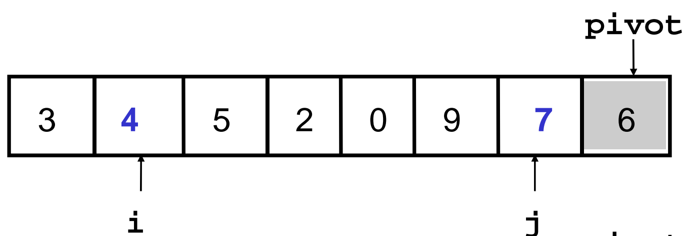


Scansione in avanti

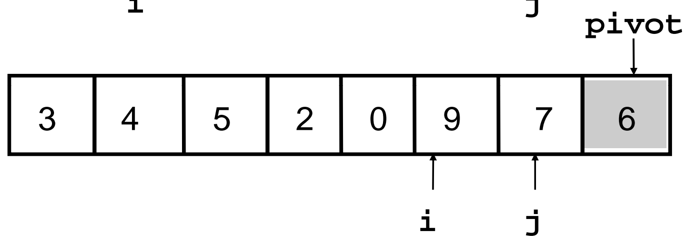


Scansione all'indietro

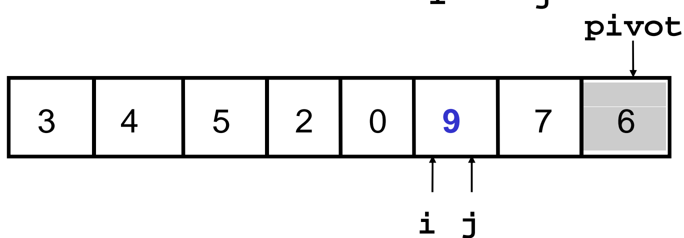
QUICK SORT



Scambio

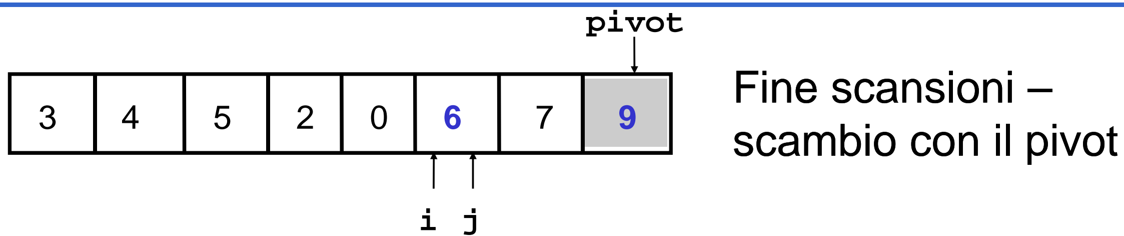


Scansione in avanti



Scansione all'indietro

QUICK SORT



- **Il pivot è nella posizione definitiva**
- **Ripetere il procedimento sui due sotto-array**
  - **`a[0, i - 1]`**
  - **`a[i + 1, dim - 1]`**

QUICK SORT

- **Si introduce una funzione che fa da interfaccia con i clienti e che invoca opportunamente la funzione ricorsiva**

```
void quickSortR(int a[], int iniz, int fine);

void quickSort(int a[], int dim)
{
    quickSortR(a[], 0, dim - 1);
}
```

QUICK SORT

```
void quickSortR(int a[], int iniz, int fine)
{
    int i, j, iPivot, pivot;
    if (iniz < fine)
    {
        i = iniz;
        j = fine;
        iPivot = fine;
        pivot = a[iPivot];
        do  /* trova la posizione del pivot */
        {
            while (i < j && a[i] <= pivot) i++;
            while (j > i && a[j] >= pivot) j--;
            if (i < j) scambia(&a[i], &a[j]);
        }
        while (i < j);
```

continua…

QUICK SORT

```
         /* determinati i due sottoinsiemi */
        /* posiziona il pivot */

        if (i != iPivot && a[i] != a[iPivot])
        {
            scambia(&a[i], &a[iPivot]);
            iPivot = i;
        }

        /* ricorsione sulle sottoparti, se necessario */
        if (iniz < iPivot - 1)
            quickSortR(a, iniz, iPivot - 1);
        if (iPivot + 1 < fine)
            quickSortR(a, iPivot + 1, fine);

    } /* (iniz < fine) */
} /* quickSortR */
```

QUICK SORT

La complessità dipende dalla scelta del pivot:

- se il pivot è scelto male (uno dei due sub-array ha lunghezza zero), i confronti sono **$O(N^2)$**
- **se però il pivot è scelto bene (in modo da avere due sub-array di egual dimensione):**
  - **Numero globale di confronti: $O(N \log_2 N)$**
- Dunque:
- Il Quick Sort è efficiente come il Merge Sort se il pivot è scelto correttamente
- Se si ha sfortuna allora l'efficienza scende fino ad un livello compatibile con il Bubble Sort (che non è proprio un fulmine…)

ESPERIMENTI

- **Verificare le valutazioni di complessità che abbiamo dato non è difficile**
  - **basta predisporre un programma che "conti" le istruzioni di confronto, incrementando ogni volta un'apposita variabile intera ...**
  - **... e farlo funzionare con diverse quantità di dati di ingresso**
- **Farlo può essere molto significativo.**