

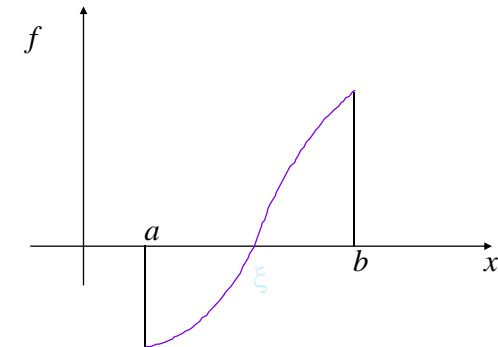
Zeri di una funzione

- Ricerca delle (eventuali) **radici reali di una funzione** che si supponga definita e continua in un certo intervallo dell'asse x
- La ricerca delle radici approssimate è composta da:
 - 1) separazione delle radici \rightarrow determinare gli intervalli a, b che contengono una sola radice
 - 2) **calcolo di un valore approssimato** della radice e **miglioramento** di tale valore fino ad ottenere la precisione desiderata (iterazione)

1

Funzioni continue - Proprietà

- Se una funzione continua $f(x)$ assume in due punti a e b valori di segno opposto, esiste almeno un valore ξ (o un numero dispari di punti) compreso fra a e b in cui $f(x)=0$



2

Metodo della bisezione

1. Dividere l'intervallo $[a, b]$ a metà:
 $c = (a + b)/2 \rightarrow$ calcolare $f(c)$
2. $f(c) = 0 \rightarrow$ radice trovata, fine procedimento.
3. $f(c) > 0 \rightarrow$ trascurare l'intervallo destro $[c, b] \rightarrow$ imporre $b = c$, proseguire col punto 5
4. $f(c) < 0 \rightarrow$ trascurare l'intervallo sinistro $[a, c] \rightarrow$ imporre $a = c$, procedere da 5
5. Se $[a, b] < 2\varepsilon$, terminare (ε è la precisione desiderata)
Altrimenti proseguire da 1

In pratica, si approssima la funzione con la retta che passa per i punti $(a, \text{sign}(f(a)))$, $(b, \text{sign}(f(b)))$

3

Problemi da affrontare...

- ...a parte l'implementazione dell'algoritmo
- Dove codificare la funzione di cui calcolare gli zeri?
 - Dentro l'algoritmo?
 - Da qualche altra parte?
- Come trattare gli eventuali errori?
 - Stampe dentro l'algoritmo?
 - Restituzione di un codice d'errore?
- Come organizzare il codice?
 - Tutto in un file?
 - Separazione di moduli funzionali in file diversi?

...le risposte sono abbastanza ovvie...

4

Definizione della funzione

- Se definita internamente al modulo dove si definisce l'algoritmo, il modulo non può essere riutilizzato ☹
- Soluzione:
 - Dichiarazione in un header file (Funzione.h)
 - Definizione nel corrispondente file sorgente (Funzione.c)
- Riusabilità a livello di codice oggetto: con operazioni di linking diverse è possibile collegare definizioni diverse della funzione

5

Definizione della funzione

■ Funzione.h

```
double funzione(double x);
```

■ Funzione.c

```
#include "Funzione.h"
double funzione(double x)
{
    return x*x - 2;
}
```

Complicabile "a piacere"...

6

Trattamento degli errori

- Restituire un codice diverso a seconda del successo o del tipo di errore avvenuto
- I codici d'errore sono definiti "da qualche parte" e sono facilmente decodificabili
 - Può essere prevista una funzione che dato il codice stampa a video qualcosa che indichi che cosa è accaduto
- **Come** definire i codici d'errore?
 - Costanti descritte da commenti nel codice
 - Costanti simboliche
- **Dove** definire i codici d'errore?
 - Nel `main()` sperando che funzioni tutto...
 - In un header file specifico...
 - Vicino alla dichiarazione dell'algoritmo di calcolo degli zeri...

7

Definizioni comuni – Common.h

```
#define BOOLEAN int
#define TRUE 1
#define FALSE 0
```

8

Definizione codici d'errore – Zeri.h

```
#define CODICEUSCITA int

#define OK 0
#define TROPPEITERAZIONI 1
#define INTERVALLONONVALIDO 2
```

*Stampa un messaggio
"amichevole" in base
al codice in ingresso*

```
void printCodiceUscita(CODICEUSCITA code);
```

*Non c'è niente
di meglio?*

9

Definizione degli errori – Zeri.c

```
#include <stdio.h>
#include "Zeri.h"

void printCodiceUscita(CODICEUSCITA code)
{
    switch (code)
    {
        case OK: printf("Ok.");
                break;
        case TROPPEITERAZIONI: printf("Troppe iterazioni.");
                break;
        case INTERVALLONONVALIDO: printf("Intervallo non valido.");
                break;
        default: printf("Codice sconosciuto.");
                break;
    }
}
```

10

Algoritmo

- Valori in ingresso:
 - Estremi dell'intervallo: a, b
 - Numero massimo di iterazioni
 - Precisione desiderata
- Valori in uscita:
 - Codice d'uscita
 - Valore dello zero

11

Algoritmo – Interfaccia

```
#include "Common.h"
```

File Zeri.h

```
CODICEUSCITA bisezione(double a, double b,
                        int maxIterazioni, double epsilon,
                        double *xZero)
```

12

Algoritmo - Pseudocodice

- Se gli estremi non sono ordinati, ordinare gli estremi
- I valori della funzione calcolati agli estremi hanno lo stesso segno → Intervallo non valido
- Iterare fino a raggiungere il **numero massimo di iterazioni** o finché non si raggiunge la **precisione desiderata**:
 - Calcolare la funzione agli estremi correnti
 - Calcolare la funzione nel punto medio rispetto agli estremi correnti
 - Se la funzione calcolata nel punto medio ha lo stesso segno dell'estremo sinistro, il nuovo estremo sinistro è il punto medio
 - Altrimenti il nuovo estremo destro è il punto medio
 - Stop quando i due estremi sono abbastanza vicini oppure quando si è trovata la radice – in entrambi i casi la soluzione da restituire è il valore medio dell'intervallo

13

Algoritmo – codifica

- Serve una funzione per il calcolo del valore assoluto di un **double**
- In C esiste solo quella per il calcolo del valore assoluto di un **int**

```
double doubleAbs(double value)
{
    return value < 0 ? -value : value;
}
```

14

Algoritmo – codifica

```
CODICEUSCITA bisezione(double a, double b, int maxIterazioni,
    double epsilon, double *xZero)
{
    int i;
    double xa, xb; //Estremi correnti
    double fa, fb; //Valori di f agli estremi correnti
    double xm, fm; //Valore medio estremi + corrisp. valore di f
    BOOLEAN stop = FALSE;

    if (a > b)
    { //Estremi non ordinati --> scambiare
        xb = a;
        xa = b;
    }
    else
    { xa = a;
      xb = b;
    }
}
```

continua...

15

Algoritmo – codifica

```
if (funzione(xa) * funzione(xb) >= 0)
{ return INTERVALLONONVALIDO;
}
for (i = 0; i < maxIterazioni && !stop; i++)
{ fa = funzione(xa);
  fb = funzione(xb);
  xm = (xa + xb) / 2;
  fm = funzione(xm);
  if (fm * fa < 0)
      xb = xm;
  else
      xa = xm;
  stop = fm == 0.0F || doubleAbs(xb - xa) < epsilon;
}
if (stop)
{ *xZero = xm;
  return OK;
}
else
{ return TROPPEITERAZIONI;
}
```

16

Algoritmo – main()

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "Common.h"
#include "Zeri.h"

int main(void)
{
    double zero;
    CODICEUSCITA code;
    code = bisezione(0, 2, 30, 0.0001, &zero);
    if (code == OK)
    {
        printf("Zero: %.10f\n\n", zero);
    }
    else
    {
        printCodiceUscita(code);
        printf("\n\n");
    }
    return (1);
}
```

17

Notare che...

- L'algoritmo così codificato non interagisce mai con l'interfaccia utente (la console)...
- ...potrebbe essere utilizzato anche in un mondo **diverso** rispetto a quello della console!
- Risultato ottenuto:
 - **Disaccoppiando** il codice di calcolo dal codice di interazione
 - Cercando di **standardizzare l'interfaccia** di interazione – problema del trattamento degli errori

18

Ma si può fare di meglio!

- La procedura di stampa degli errori potrebbe non stampare...
 - ...evitando di introdurre una dipendenza dalla console
- Se restituisse delle stringhe sarebbe perfetto:
 - Una stringa è indipendente dal "dove" verrà messa in output
 - Console
 - Interfaccia grafica
 - Stampante...

19

Altri algoritmi di calcolo degli zeri

- Il procedimento base è sempre lo stesso...
- ...cambia solo il modo di avvicinarsi alla soluzione!
 - Detto ξ lo zero di f (appartenente all'intervallo $[a,b]$), sia x_0 una arbitraria approssimazione dello zero ξ nell'intervallo $[a,b]$:
 - Si approssima la funzione con una retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ la cui equazione è:
$$y = K_0(x - x_0) + f(x_0)$$
 - L'intersezione tra la retta e l'asse delle ascisse dà origine alla nuova approssimazione x_1 della radice ξ
 - Si itera fino a raggiungere la precisione desiderata

20

Altri algoritmi di calcolo degli zeri

- Metodi:
 - Corde
 - Secanti
 - Newton – Rhapson
- Questi metodi si basano su approssimazioni successive della funzione f con rette del tipo:

$$y = K_i(x-x_i) + f(x_i)$$

Ogni metodo differisce dagli altri per la **scelta del coefficiente angolare K_i**