

LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita **ricorsivamente** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa
- La ricorsione consiste nella possibilità di **definire una funzione in termini di se stessa**
- È basata sul principio di induzione matematica:
 - se una proprietà P vale per $n=n_0$  CASO BASE
 - e si può provare che, **assumendola valida per n**, allora vale per $n+1$allora P vale per ogni $n \geq n_0$

1

LA RICORSIONE

- Operativamente, risolvere un problema con un approccio ricorsivo comporta**
- di identificare un “caso base”, con soluzione nota
 - di riuscire a **esprimere la soluzione al caso generico n in termini dello stesso problema in uno o più casi più semplici** ($n-1$, $n-2$, etc.)

2

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Esempio: il fattoriale di un numero

$\text{fact}(n) = n!$

$n!: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$n!$ vale 1 se $n \leq 0$

$n!$ vale $n \cdot (n-1)!$ se $n > 0$

Codifica:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

3

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz, z = 5;
    fz = fact(z-2);
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fact() una copia del valore così ottenuto (3)

fact(3) effettuerà poi analogamente una nuova chiamata di funzione fact(2)

4

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
main(){  
    int fz,z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

Analogamente, fact(2) effettua una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact() vale 1 quindi viene chiamata fact(1)

E ancora, analogamente, per fact(0)

5

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
main(){  
    int fz,z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. La condizione n <=0 è vera e la funzione fact(0) torna come risultato 1 e termina

6

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
main(){  
    int fz,z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

*Il controllo torna al servitore precedente fact(1) che può valutare l'espressione $n * 1$ ottenendo come risultato 1 e terminando*

E analogamente per fact(2) e fact(3)

7

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

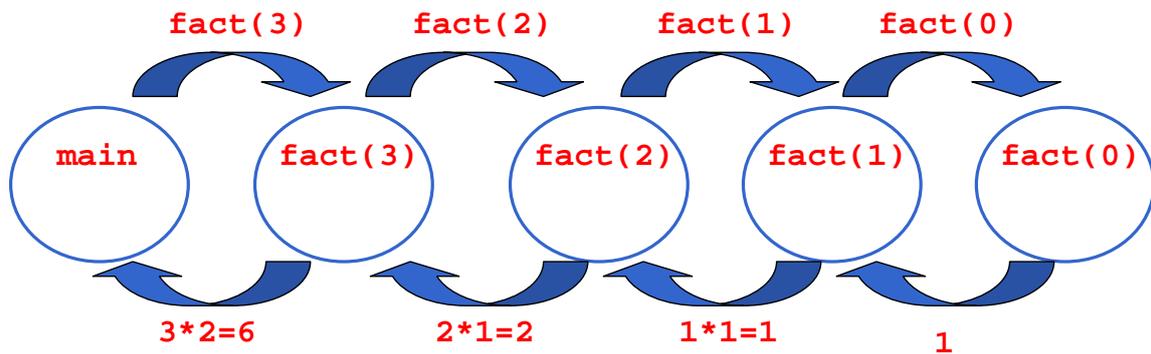
```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
main(){  
    int fz,z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

IL CONTROLLO PASSA INFINE AL MAIN CHE ASSEGNA A fz IL VALORE 6

8

LA RICORSIONE: ESEMPIO



`main` `fact(3) = 3 * fact(2) = 2 * fact(1) = 1 * fact(0)`

Cliente di <code>fact(3)</code>	Cliente di <code>fact(2)</code> Servitore del <code>main</code>	Cliente di <code>fact(1)</code> Servitore di <code>fact(3)</code>	Cliente di <code>fact(0)</code> Servitore di <code>fact(2)</code>	Servitore di <code>fact(1)</code>
------------------------------------	--	--	--	--------------------------------------

9

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Specifica:

Considera la somma $1+2+3+\dots+(N-1)+N$ come composta di due termini:

• $(1+2+3+\dots+(N-1))$ →

• N → *Valore noto*

Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi

Esiste un caso banale ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1

10

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare la somma dei primi N interi

Algoritmo ricorsivo

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della
somma dei primi N-1 interi

11

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n){  
    if (n==1) return 1;  
    else return sommaFinoA(n-1)+n;  
}
```

12

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

13

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

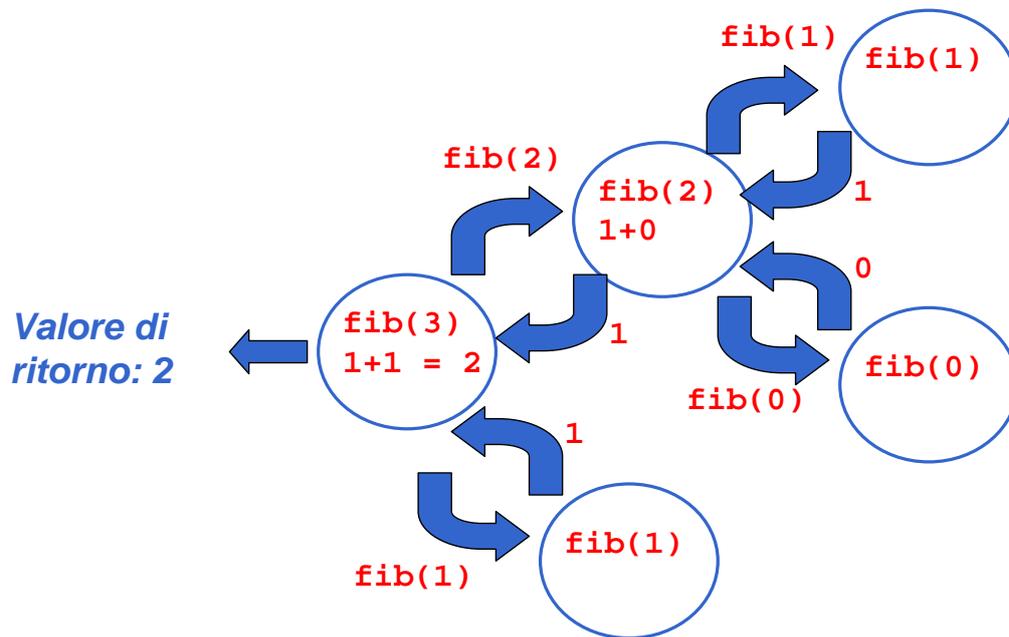
Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {  
    if (n<2) return n;  
    else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);  
}
```

*Ricorsione non lineare: ogni
invocazione del servitore causa
due nuove chiamate al servitore
medesimo*

14

LA RICORSIONE: ESEMPIO



15

UNA RIFLESSIONE

Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato **SOLO DOPO** che si sono aperte tutte le chiamate, “a ritroso”, mentre le chiamate si chiudono

*Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema, **ma non calcolano nulla***

Il risultato viene sintetizzato a partire dalla fine, perché prima occorre arrivare al caso “banale”:

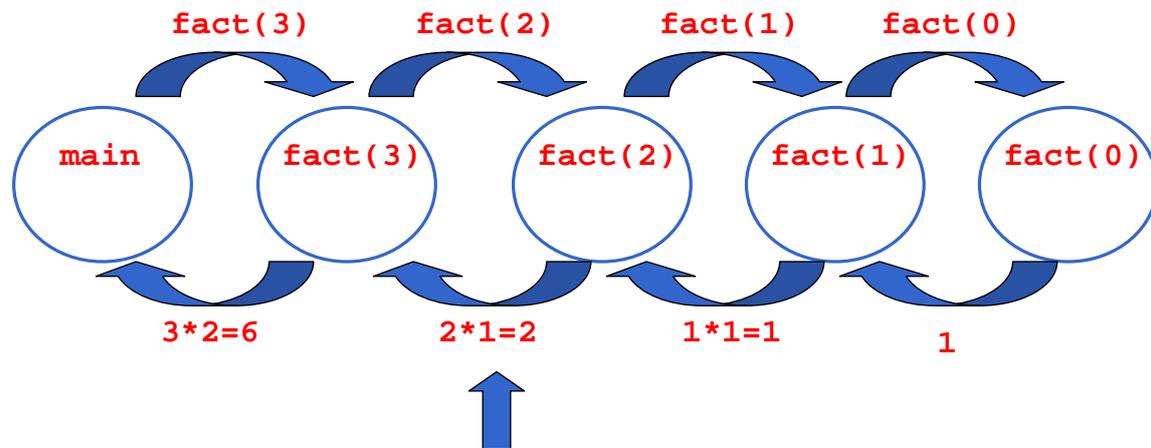
- il caso “banale” fornisce il valore di partenza
- poi si sintetizzano, “a ritroso”, i successivi risultati parziali



Processo computazionale effettivamente ricorsivo

16

LA RICORSIONE



PASSI:

- 1) `fact(3)` chiama `fact(2)` passandogli il controllo
- 2) `fact(2)` calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
- 3) `fact(3)` riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione $3 \cdot 2$
- 4) termina anche `fact(3)` e torna il controllo al `main`

17

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *“in avanti”*
- Ogni processo computazionale che computi “in avanti”, per accumulo, costituisce una **ITERAZIONE**, ossia è un *processo computazionale iterativo*
- La caratteristica fondamentale di un **processo computazionale ITERATIVO** è che **a ogni passo è disponibile un risultato parziale**
 - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
 - questo **non è vero nei processi computazionali ricorsivi**, in cui nulla è disponibile fino al caso elementare

18

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 * \dots * k$:

$$1! = v_1 = 1$$

$$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1) * v_k \quad \text{per } k \geq 1$$

$$n! = v_n \quad \text{per } k=n$$

19

FATTORIALE ITERATIVO

Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
    int i=1;
    int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
    while (i <= n)
        { F=F*i;
          i=i+1; }
    return F;
}
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

La variabile F accumula risultati intermedi: se n = 3 inizialmente F=1, poi al primo ciclo F=1, poi al secondo ciclo F assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo i=3 e F assume il valore 6

- Al primo passo F accumula il fattoriale di 1
- Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2
- Al passo i-esimo F accumula il fattoriale di i

20

FUNZIONI: IL MODELLO A RUN-TIME

Ogni volta che viene invocata una funzione:

- si crea una **nuova attivazione (istanza)** del servitore
- viene **allocata la memoria** per i parametri e per le variabili locali
- si effettua il passaggio dei parametri
- si trasferisce il controllo al servitore
- si esegue il codice della funzione

21

IL MODELLO A RUN-TIME: ENVIRONMENT

- La definizione di una funzione introduce un **nuovo binding** nell'environment in cui la funzione è definita
- Al momento dell'*invocazione*, viene creata una **struttura dati che contiene i binding dei parametri e degli identificatori definiti localmente** alla funzione detta **RECORD DI ATTIVAZIONE**

22

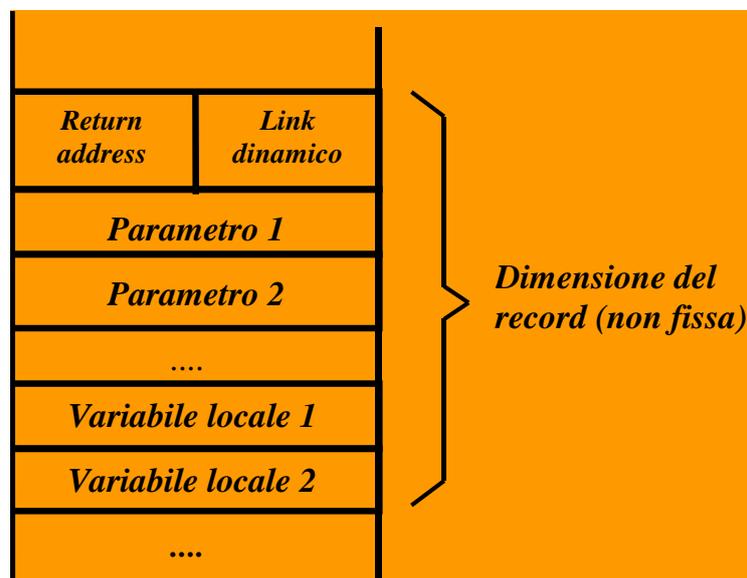
RECORD DI ATTIVAZIONE

È il “*mondo della funzione*”: *contiene tutto ciò che ne caratterizza l'esistenza*

- i **parametri** ricevuti
- le **variabili locali**
- l'**indirizzo di ritorno** (*Return Address RA*) che indica il punto a cui tornare (nel codice del cliente) al termine della funzione, per permettere al cliente di proseguire una volta che la funzione termina
- un **collegamento al record di attivazione del cliente** (*Dynamic Link DL*)

23

RECORD DI ATTIVAZIONE



24

RECORD DI ATTIVAZIONE

- Rappresenta il “*mondo della funzione*”: *nasce e muore con essa*
 - è **creato** al momento della **invocazione** di una funzione
 - **permane** per tutto il tempo in cui la funzione è in **esecuzione**
 - è distrutto (**deallocato**) al termine dell'esecuzione della funzione stessa
- Ad **ogni chiamata** di funzione viene **creato un nuovo record**, *specifico per quella chiamata di quella funzione*
- La dimensione del record di attivazione
 - varia da una funzione all'altra
 - *per una data funzione, è fissa e calcolabile a priori*

25

RECORD DI ATTIVAZIONE

Funzioni che chiamano altre funzioni danno luogo a una **sequenza di record di attivazione**

- allocati secondo l'ordine delle chiamate
- deallocati in ordine inverso

La sequenza dei link dinamici costituisce la cosiddetta *catena dinamica*, che rappresenta *la storia delle attivazioni* (“*chi ha chiamato chi*”)

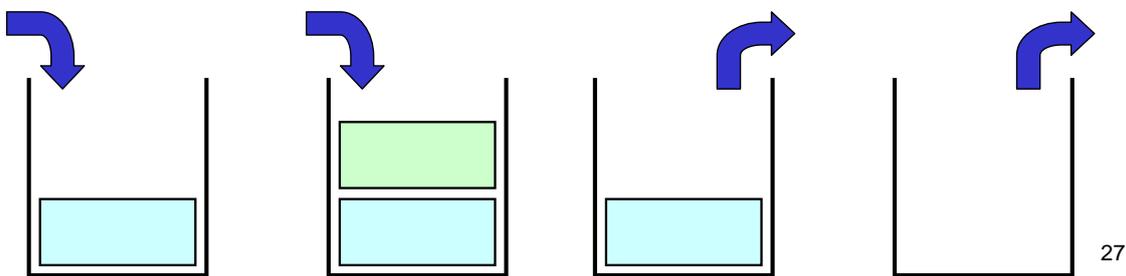
26

RECORD DI ATTIVAZIONE

Per catturare la semantica delle chiamate annidate (una funzione che chiama un'altra funzione che...), l'area di memoria in cui vengono allocati i record di attivazione deve essere gestita come una pila

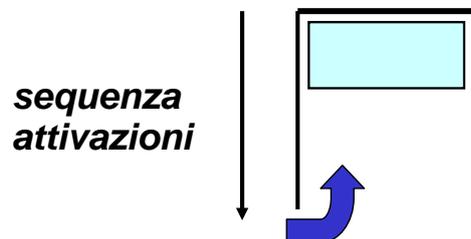
STACK

Una struttura dati gestita con politica LIFO (Last In, First Out - l'ultimo a entrare è il primo a uscire)

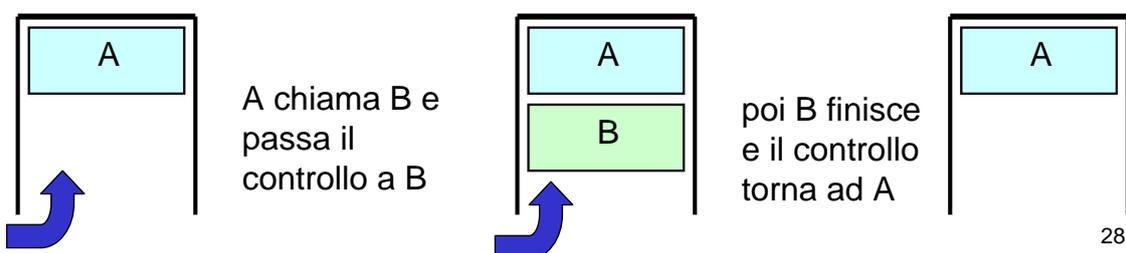


RECORD DI ATTIVAZIONE

Normalmente lo STACK dei record di attivazione si disegna nel modo seguente



Quindi, se la funzione A chiama la funzione B lo stack evolve nel modo seguente



RECORD DI ATTIVAZIONE

Il valore di ritorno calcolato dalla funzione può essere *restituito al cliente* in due modi:

- **inserendo un apposito “slot” nel record di attivazione**
 - il cliente deve copiersi il risultato da qualche parte *prima* che il record venga distrutto
- **tramite un registro della CPU**
 - soluzione più semplice ed efficiente, privilegiata ovunque possibile

29

ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Programma:

```
int R(int A) { return A+1; }
int Q(int x) { return R(x); }
int P(void) { int a=10; return Q(a); }
Int main() { int x = P(); }
```

Sequenza chiamate:

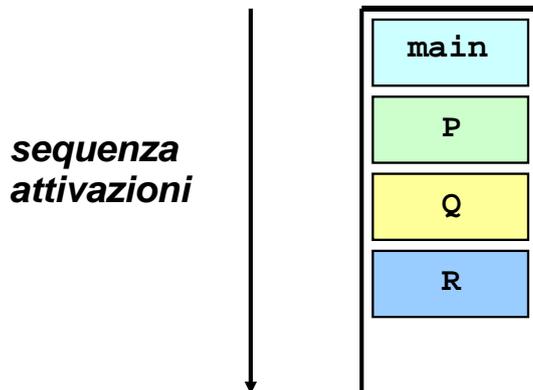
S.O. → main → P() → Q() → R()

30

ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Sequenza chiamate:

S.O. → main → P() → Q() → R()



31

ESEMPIO: FATTORIALE

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

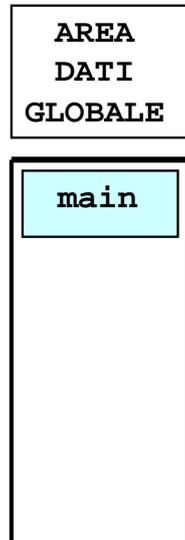
```
int main(){  
    int x, y;  
    x = 2;  
    y = fact(x);  
}
```

NOTA: Anche il `main()`
è una funzione

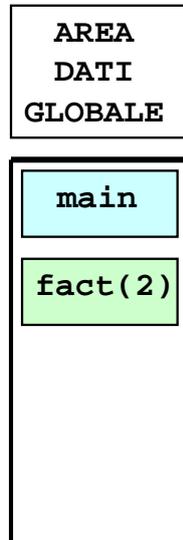
32

ESEMPIO: FATTORIALE

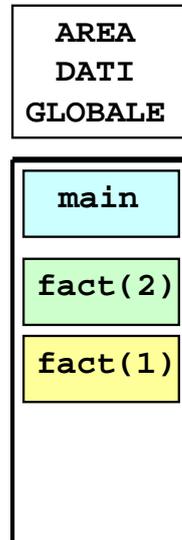
Situazione all'inizio dell'esecuzione del `main()`



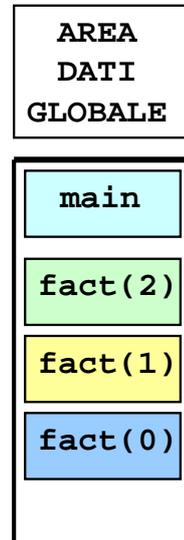
Il `main()` chiama `fact(2)`



`fact(2)` chiama `fact(1)`



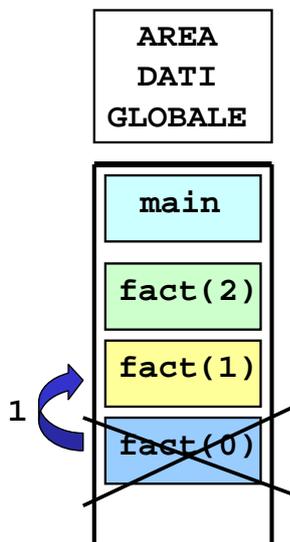
`fact(1)` chiama `fact(0)`



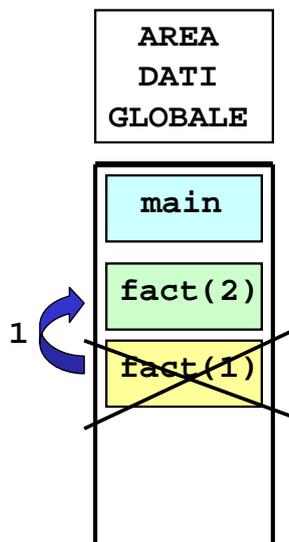
33

ESEMPIO: FATTORIALE

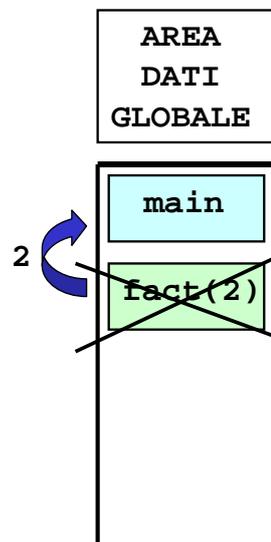
`fact(0)` termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(1)`



`fact(1)` **effettua la moltiplicazione** e termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(2)`

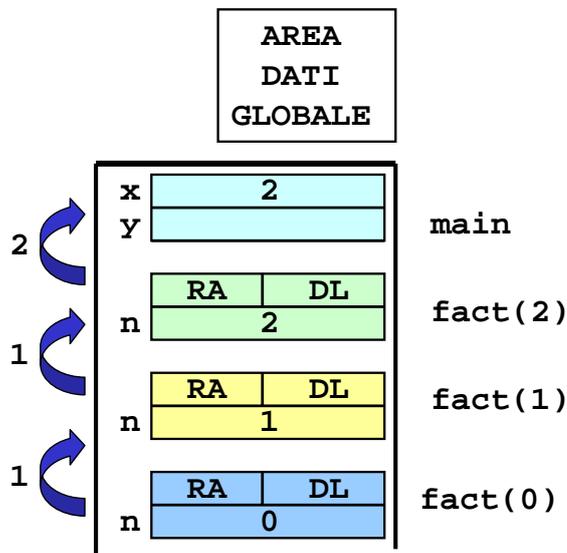


`fact(1)` **effettua la moltiplicazione** e termina restituendo il valore 2. Il controllo torna al `main()`



34

RECORD DI ATTIVAZIONE IN DETTAGLIO



35

RICORSIONE vs. ITERAZIONE

A volte processi computazionali **ricorsivi** rispecchiano meglio il problema e/o la **soluzione del problema** (ad es. *strutture dati ricorsive* quali liste - le vedremo nel dettaglio più avanti...)

MA:

nei processi computazionali **ricorsivi** ogni funzione che effettua una chiamata ricorsiva deve **aspettare il risultato del servitore** per **effettuare operazioni su questo** e solo in seguito può terminare

→ **Maggiore occupazione di memoria per record attivazione** a meno di "ottimizzazioni" da parte del compilatore (*tail recursion optimization* non presente in C e Java, ma in Prolog)

36