LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita ***ricorsivamente*** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa

- La ricorsione consiste nella possibilità di ***definire una funzione in termini di se stessa***

- È basata sul *principio di induzione* matematica:
  - se una proprietà P vale per $n=n_0$ ⇒ CASO BASE
  - e si può provare che, ***assumendola valida per n***, allora vale per n+1

  allora P vale per ogni $n \geq n_0$

LA RICORSIONE

Operativamente, risolvere un problema con un approccio ricorsivo comporta

- **di identificare un "caso base", con soluzione nota**
- **di riuscire a esprimere la soluzione al caso generico *n* in termini dello *stesso problema* *in uno o più casi più semplici*** (n-1, n-2, etc.)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Esempio: il fattoriale di un numero

```
fact(n) = n!
n!: Z → N
   n! vale 1              se n ≤ 0
   n! vale n*(n-1)!       se n > 0
```

Codifica:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```


LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fact() una copia del valore così ottenuto (3)

fact(3) effettuerà poi analogamente una nuova chiamata di funzione fact(2)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Analogamente, fact(2) effettua una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact() vale 1 quindi viene chiamata `fact(1)`

E ancora, analogamente, per `fact(0)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. La condizione n <=0 è vera e la funzione `fact(0)` *torna come risultato 1 e termina*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(1)` *che può valutare l'espressione n * 1 ottenendo come risultato 1 e terminando*

E analogamente per fact(2) e fact(3)

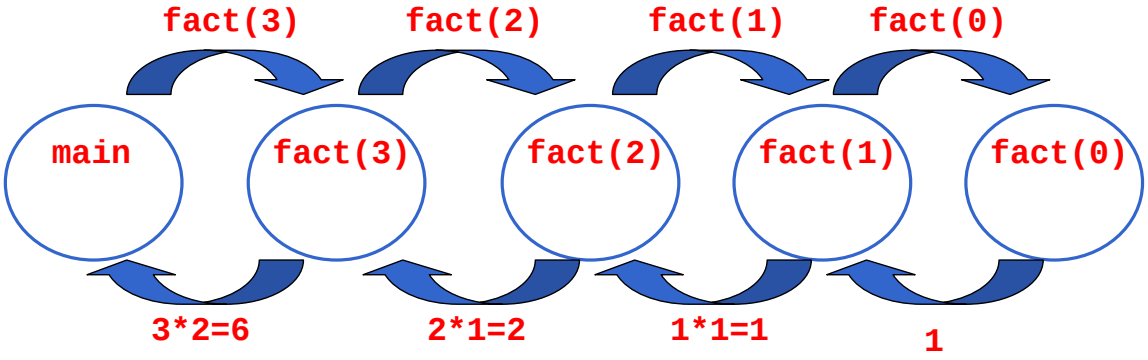
LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

IL CONTROLLO PASSA INFINE AL MAIN CHE ASSEGNA A fz IL VALORE 6

LA RICORSIONE: ESEMPIO



main	fact(3)= 3 * fact(2)= 2 * fact(1) = 1 *fact(0)			
Cliente di fact(3)	Cliente di fact(2) Servitore del main	Cliente di fact(1) Servitore di fact(3)	Cliente di fact(0) Servitore di fact(2)	Servitore di fact(1)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Specifica:

Considera la somma 1+2+3+...+(N-1)+N come composta di due termini:

- (1+2+3+...+(N-1)) ⇒ ***Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi***
- N ⇒ ***Valore noto***

Esiste un caso banale ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Algoritmo ricorsivo

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della somma dei primi N-1 interi

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n){
 if (n==1) return 1;
    else return sommaFinoA(n-1)+n;
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$fib(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ fib(n-1) + fib(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LA RICORSIONE: ESEMPIO

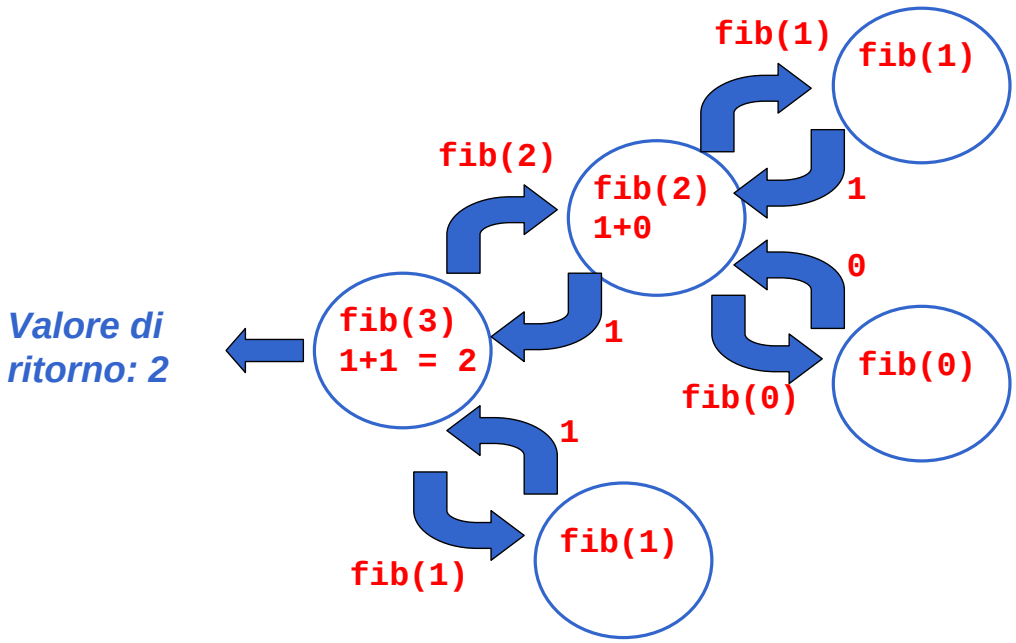
Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {
  if (n<2) return n;
  else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
}
```

***Ricorsione non lineare**: ogni invocazione del servitore causa due nuove chiamate al servitore medesimo*

LA RICORSIONE: ESEMPIO



UNA RIFLESSIONE

Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato **SOLO DOPO** che si sono aperte tutte le chiamate, *"a ritroso"*, mentre le chiamate si chiudono

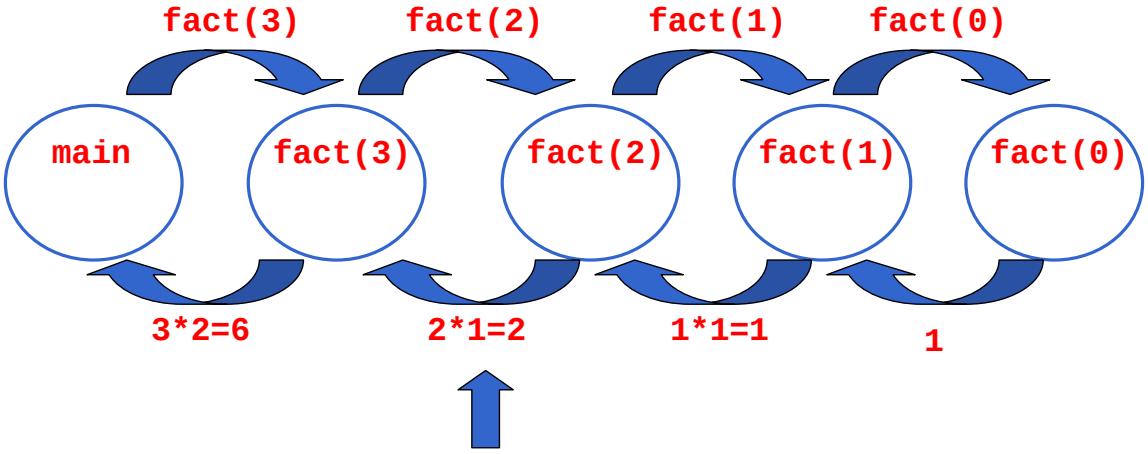
> *Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema,* ***ma non calcolano nulla***

Il risultato viene sintetizzato *a partire dalla fine, perché prima occorre arrivare al caso "banale"*:

- il caso "banale" fornisce il valore di partenza
- poi si sintetizzano, "a ritroso", i successivi risultati parziali

Processo computazionale effettivamente ricorsivo

LA RICORSIONE



PASSI:
1) **`fact(3)`** chiama **`fact(2)`** passandogli il controllo
2) **`fact(2)`** calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
3) **`fact(3)`** riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione 3*2
4) termina anche **`fact(3)`** e torna il controllo al main

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *"in avanti"*
- Ogni processo computazionale che computi "in avanti", per accumulo, costituisce una ***ITERAZIONE***, ossia è un *processo computazionale iterativo*
- La caratteristica fondamentale di un **processo computazionale *ITERATIVO* è che *a ogni passo è disponibile un risultato parziale***
  - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
  - questo ***non è vero* nei processi computazionali *ricorsivi,*** in cui nulla è disponibile fino al caso elementare

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- Un processo computazionale iterativo si può realizzare anche tramite funzioni ricorsive
- Si basa sulla disponibilità di una variabile, detta *accumulatore*, destinata a esprimere *in ogni istante* la soluzione corrente
- Si imposta identificando quell'operazione di *modifica dell'accumulatore* che lo porta a esprimere, dal valore relativo al passo k, il valore relativo al passo k+1

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$n! = 1 * 2 * 3 *\ldots * n$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 *\ldots * k$:

$1! = v_1 = 1$

$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1)* v_k$ *per $k \geq 1$*

$n! = v_n$ *per $k=n$*

FATTORIALE ITERATIVO

Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
      int i=1;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      while (i <= n)
            { F=F*i;
              i=i+1; }
      return F;
      }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

La variabile F accumula risultati intermedi: se n = 3 inizialmente `F=1`, *poi al primo ciclo* `F=1`, *poi al secondo ciclo* `F` *assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo* `i=3` *e* `F` *assume il valore 6*

- Al primo passo F accumula il fattoriale di 1
- Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2
- Al passo i-esimo F accumula il fattoriale di i

ITERAZIONE E RICORSIONE TAIL

- **il corpo del ciclo rimane *immutato***
- **il ciclo diventa un `if` con, in fondo, la chiamata tail-ricorsiva**

`while (condizione) {`
`  <corpo del ciclo>`
`}`
	`if (condizione) {`
	`  <corpo del ciclo>`
	`  <chiamata ricorsiva>`
	`}`

Naturalmente, può essere necessario ***aggiungere nuovi parametri*** nell'intestazione della funzione tail-ricorsiva, per "portare avanti" le variabili di stato

FATTORIALE ITERATIVO

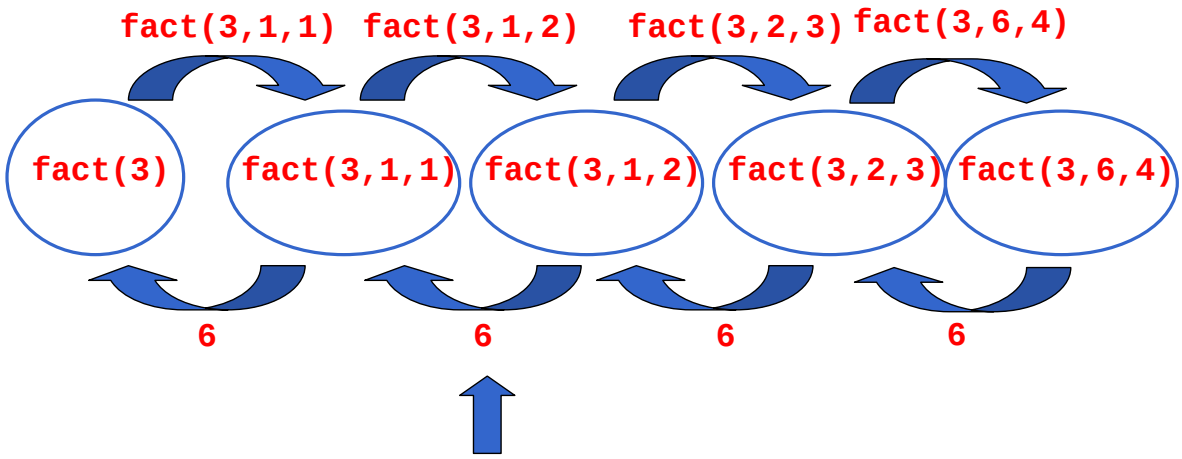
```
int fact(int n){
  return factIt(n,1,1);
}

int factIt(int n, int F, int i){
  if (i <= n)
   {F = i*F;
    i = i+1;
    return factI(n,F,i);
   }
  return F;
}
```

Inizializzazione dell'accumulatore: corrisponde al fattoriale di 1

Contatore del passo

Accumulatore del risultato parziale

LA RICORSIONE



NOTA: ciascuna funzione che effettua una chiamata ricorsiva si sospende, aspetta la terminazione del servitore e poi termina, cioè **NON EFFETTUA ALTRE OPERAZIONI DOPO**

RIASSUMENDO….

La soluzione ricorsiva individuata per il fattoriale è ***sintatticamente ricorsiva*** ma dà luogo a un ***processo computazionale ITERATIVO***

Ricorsione apparente detta **RICORSIONE TAIL**

Il risultato viene sintetizzato *in avanti*

- ogni passo *decompone e calcola*
- *e porta in avanti il nuovo risultato parziale* quando le chiamate si chiudono non si fa altro che riportare indietro, fino al cliente, il risultato ottenuto

RICORSIONE TAIL

- Una ricorsione che realizza un processo computazionale *ITERATIVO è una ricorsione apparente*
- la chiamata ricorsiva è *sempre l'ultima istruzione*
  - *i calcoli sono fatti prima*
  - *la chiamata serve solo, dopo averli fatti, per proseguire la computazione*
- questa forma di ricorsione si chiama *RICORSIONE TAIL* ("ricorsione in coda")