LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita ***ricorsivamente*** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa

- La ricorsione consiste nella possibilità di *definire una funzione in termini di se stessa*

- È basata sul *principio di induzione* matematica:
  - se una proprietà P vale per $n=n_0$ ⇒ CASO BASE
  - e si può provare che, *assumendola valida per n*, allora vale per n+1

  allora P vale per ogni $n \geq n_0$

LA RICORSIONE

Operativamente, risolvere un problema con un approccio ricorsivo comporta

- **di identificare un "caso base" la cui soluzione sia nota**
- **di riuscire a esprimere la soluzione al caso generico *n* in termini dello *stesso problema in uno o più casi più semplici*** (n-1, n-2, etc)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Esempio: il fattoriale di un numero

```
fact(n) = n!
n!: Z → N
   n! vale 1             se n ≤ 0
   n! vale n*(n-1)!      se n > 0
```

Codifica:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fact <u>una copia</u> del valore così ottenuto (3)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

La funzione fact lega il parametro n a 3. Essendo 3 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione è necessario effettuare una nuova chiamata di funzione `fact(2)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 2. Essendo 2 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione è necessario effettuare una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact vale 1 quindi viene chiamata `fact(1)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 1. Essendo 1 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione è necessario effettuare una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact vale 0 quindi viene chiamata `fact(0)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. La condizione n <=0 è vera e la funzione `fact(0)` *torna come risultato 1 e termina*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(1)` *che può valutare l'espressione n * 1 (valutando n nel suo environment dove vale 1) ottenendo come risultato 1 e terminando*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
    if n<=0 return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(2)` *che può valutare l'espressione n * 1 (valutando n nel suo environment dove vale 2) ottenendo come risultato 2 e terminando*

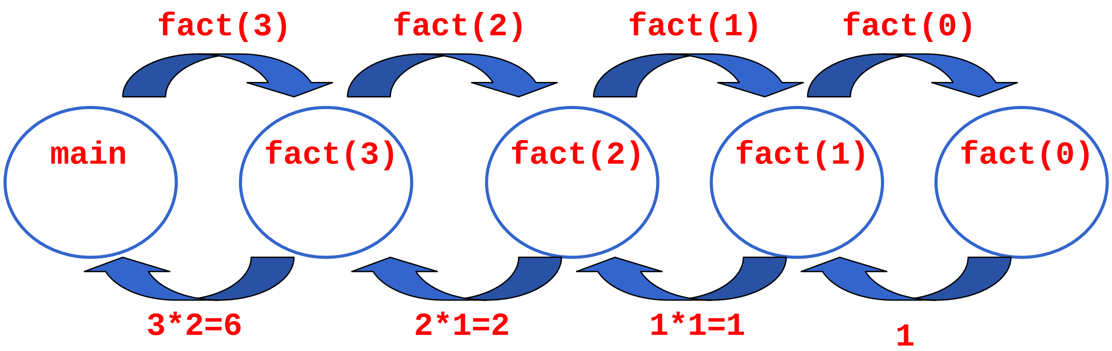
LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {
   if n<=0 return 1;
   else return n*fact(n-1);
}
main(){
   int fz,z = 5;
   fz = fact(z-2);
   }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(3)` *che può valutare l'espressione n * 2 (valutando n nel suo environment dove vale 3) ottenendo come risultato 6 e terminando*
IL CONTROLLO PASSA AL MAIN CHE ASSEGNA A fz IL VALORE 6

LA RICORSIONE: ESEMPIO



main fact(3)= 3 * fact(2)= 2 * fact(1) = 1 *fact(0)

Cliente di fact(3)	Cliente di fact(2) Servitore del main	Cliente di fact(1) Servitore di fact(3)	Cliente di fact(0) Servitore di fact(2)	Servitore di fact(1)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Specifica:

Considera la somma 1+2+3+...+(N-1)+N come composta di due termini:

- (1+2+3+...+(N-1)) → *Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi*
- N → *Valore noto*

Esiste un caso banale ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Algoritmo ricorsivo

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della somma dei primi N-1 interi

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n){
 if (n==1) return 1;
    else return sommaFinoA(n-1)+n;
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

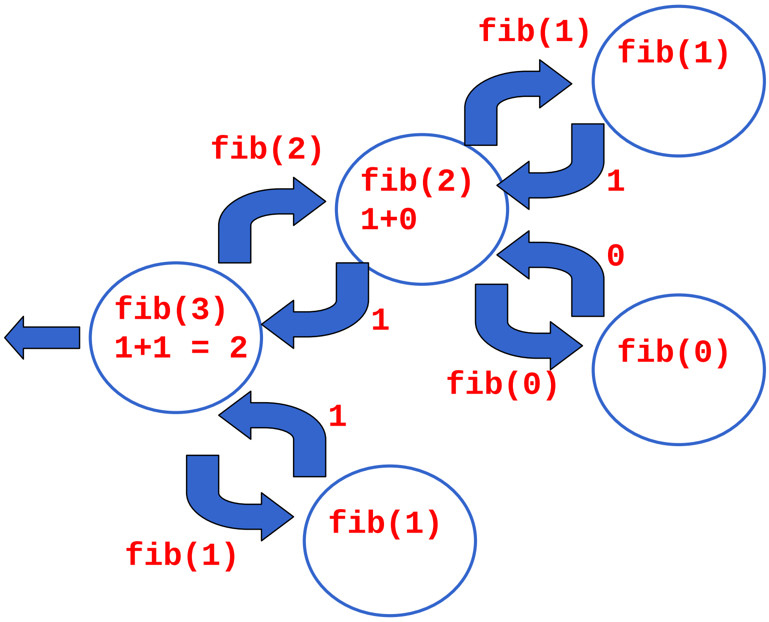
Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {
  if (n<2) return n;
  else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
}
```

***Ricorsione non lineare**: ogni invocazione del servitore causa <u>due</u> nuove chiamate al servitore medesimo*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Valore di ritorno: 2



UNA RIFLESSIONE

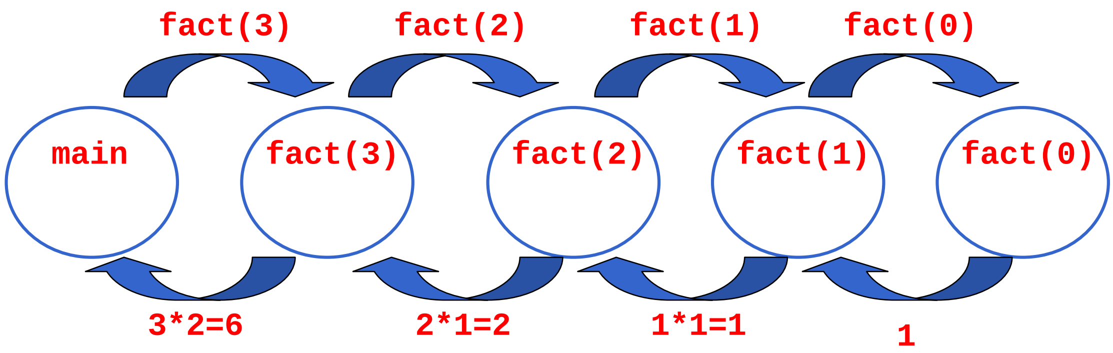
- Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato <u>solo dopo</u> che si sono aperte tutte le chiamate, *"a ritroso"*, mentre le chiamate si chiudono

Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema, <u>ma non calcolano nulla</u>

- Il risultato viene sintetizzato *<u>a partire dalla fine</u>, perché prima occorre arrivare al caso "banale"*:
  - il caso "banale" <u>fornisce il valore di partenza</u>
  - poi si sintetizzano, "a ritroso", i successivi risultati parziali

Processo computazionale effettivamente ricorsivo

LA RICORSIONE



PASSI:
1) **`fact(3)`** chiama **`fact(2)`** passandogli il controllo,
2) **`fact(2)`** calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
3) **`fact(3)`** riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione 3*2
4) termina anche **`fact(3)`** e torna il controllo al main

FATTORIALE ITERATIVO

Abbiamo visto il calcolo del fattoriale di un numero N tramite procedimento ricorsivo. Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
     int i;
     int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
     for (i=2;i <= n; i++)
      F=F*i;
     return F;
     }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

FATTORIALE ITERATIVO

```
int fact(int n){
     int i;
     int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
     for (i=2; i <= n; i++)
          F=F*i;
     return F;
     }
```

La variabile F accumula risultati intermedi: se n = 3 inizialmente `F=1` *poi al primo ciclo for* `i=2 F` *assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo for* `i=3 F` *assume il valore 6*

- Al primo passo F accumula il fattoriale di 1
- Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2
- Al passo i-esimo F accumula il fattoriale di i

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *"in avanti"*
- Ogni processo computazionale che computi "in avanti", per accumulo, costituisce una *ITERAZIONE*, ossia è un *processo computazionale iterativo*
- La caratteristica fondamentale di un processo computazionale *ITERATIVO* è che *a ogni passo è disponibile un risultato parziale*
  - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
  - questo *non è vero* nei processi computazionali *ricorsivi,* in cui nulla è disponibile finché non si è giunti fino al caso elementare

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- Un processo computazionale iterativo si può realizzare anche tramite funzioni ricorsive
- Si basa sulla disponibilità di una variabile, detta *accumulatore*, destinata a esprimere *in ogni istante* la soluzione corrente
- Si imposta identificando quell'operazione di *modifica dell'accumulatore* che lo porta a esprimere, dal valore relativo al passo k, il valore relativo al passo k+1

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 * \ldots * k$:

$1! = v_1 = 1$

$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1) * v_k$ *per* $k \geq 1$

$n! = v_n$ *per* $k=n$

FATTORIALE ITERATIVO

Abbiamo visto il calcolo del fattoriale di un numero N tramite procedimento iterativo. Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
      int i=1;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      while (i < n)
             { F=F*i;
               i=i+1; }
      return F;
      }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

ITERAZIONE E RICORSIONE TAIL

- il corpo del ciclo rimane *immutato*
- **il ciclo diventa un `if` con, in fondo, la chiamata tail-ricorsiva.**

`while (condizione) {` *`<corpo del ciclo>`* `}`	`if (condizione) {` *`<corpo del ciclo>`* *`<chiamata ricorsiva>`* `}`

Naturalmente, può essere necessario *aggiungere nuovi parametri* nell'intestazione della funzione tail-ricorsiva, per "portare avanti" le variabili di stato

FATTORIALE ITERATIVO

```
int fact(int n){
  return factIter(n,1,1);
}
```

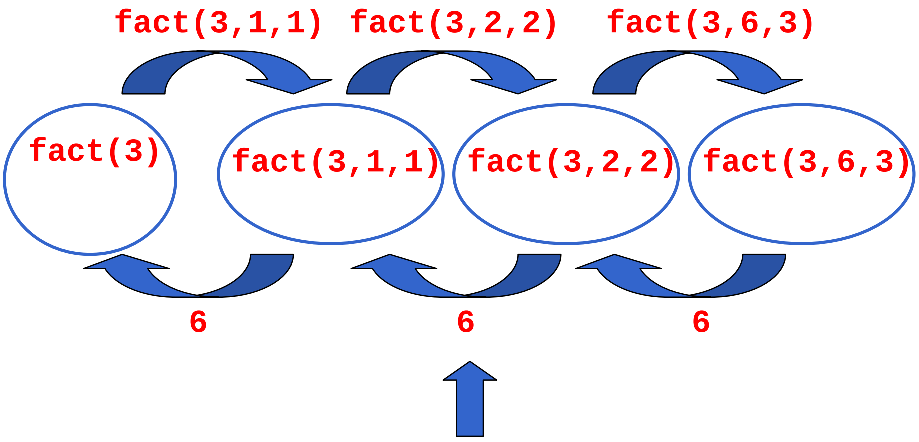
Inizializzazione dell'accumulatore: corrisponde al fattoriale di 1

Contatore del passo

```
int factIter(int n, int F, int i){
  if (i < n)
   {F = (i+1)*F;
    i = i+1;
    return factIter(n,F,i);
   }
  return F;
}
```

Accumulatore del risultato parziale

LA RICORSIONE



Al passo i-esimo viene calcolato il fattoriale di i. Quando i = n l’attivazione della funzione corrispondente calcola il fattoriale di n.
NOTA: ciascuna funzione che effettua una chiamata ricorsiva si sospende, aspetta la terminazione del servitore e poi termina, cioè **NON EFFETTUA ALTRE OPERAZIONI DOPO**

RIASSUMENDO….

- La soluzione ricorsiva individuata per il fattoriale è *sintatticamente ricorsiva* ma dà luogo a un *processo computazionale ITERATIVO*

Ricorsione apparente detta RICORSIONE TAIL

- Il risultato viene sintetizzato *in avanti*
  - ogni passo *decompone e calcola*
  - *e porta in avanti il nuovo risultato parziale* quando le chiamate si chiudono non si fa altro che riportare indietro, fino al cliente, il risultato ottenuto

RICORSIONE TAIL

- Una ricorsione che realizza un processo computazionale *ITERATIVO* *è una ricorsione apparente*
- la chiamata ricorsiva è *sempre l'ultima istruzione*
  - *i calcoli sono fatti prima*
  - *la chiamata serve solo, dopo averli fatti, per proseguire la computazione*
- questa forma di ricorsione si chiama *RICORSIONE TAIL* ("ricorsione in coda")