L'APPROCCIO FUNZIONALE

Obiettivo: esprimere la soluzione di un problema sotto forma di funzione

- **Quali *funzioni primitive*?**
- **Quali *meccanismi di combinazione*?**

UN POSSIBILE INSIEME DI PRIMITIVE

- **La funzione *zero*:** ***zero*: N→N**
- **La funzione *successore*:** ***succ*: N→N**

Partendo da

- ***le funzioni primitive sui naturali***
- **l'operatore di *uguaglianza***
- **le *espressioni condizionali***
- **la *ricorsione***

si possono definire alcune funzioni che siamo abituati da sempre a considerare date a priori

FUNZIONI ELEMENTARI

In questi esempi:

- denoteremo con 0 il valore restituito dalla funzione *zero*
- supporremo data la funzione *succ* tale che

  succ: N→N

  succ(N) ::= N+1

- considereremo solo numeri *non negativi*

PREDECESSORE

Precedessore in termini del successore:

$$y = pred(x) \Leftrightarrow x = succ(y)$$

```
int pred(int x){
  return (x==1) ? 0 : raggiungi(x,0);
}

int raggiungi(int x, int y){
  return (x==succ(y)) ? y :
              raggiungi(x,succ(y));
}
```

PREDECESSORE: FUNZIONAMENTO

Cliente	*Chiama*
(main)	**Pred(3)**
Pred(3)	**raggiungi(3,0)**
raggiungi(3,0)	**raggiungi(3,1)**
raggiungi(3,1)	**raggiungi(3,2)**
raggiungi(3,2) $\rightarrow$ ***2***	

SOMMA

Somma in termini di successore e precedessore :

$$x + y = 1+((x-1)+y)$$

```
int sum(int x, int y){
  return (x==0) ? y :
                succ(sum(pred(x),y));
}
```

SOMMA: FUNZIONAMENTO

Cliente	*Chiama*
(main)	**sum(3,5)**
sum(3,5)	**succ(sum(2,5))**
sum(2,5)	**succ(sum(1,5))**
sum(1,5)	**succ(sum(0,5))**
sum(0,5) $\rightarrow$ ***5***	
succ(5) $\rightarrow$ ***6***	
succ(6) $\rightarrow$ ***7***	
succ(7) $\rightarrow$ ***8***	

MOLTIPLICAZIONE

Prodotto in termini di precedessore e somma:

```
x * y = y + (x-1)*y
```

```
int mul(int x, int y){
  return (x==0) ? 0 :
              sum(mul(pred(x),y),y);
}
```

MOLTIPLICAZIONE: FUNZIONAMENTO

Cliente	*Chiama*
(main)	**mul(3,6)**
mul(3,6)	**sum(mul(2,6),6)**
mul(2,6)	**sum(mul(1,6),6)**
mul(1,6)	**sum(mul(0,6),6)**
mul(0,6) $\rightarrow$ ***0***	

sum(0,6) $\rightarrow$ ***6***

sum(6,6) $\rightarrow$ ***12***

sum(12,6) $\rightarrow$ ***18***

SOTTRAZIONE

Differenza in termini del precedessore :

```
x - y = (x-(y-1))-1
```

```
int diff(int x, int y){
  return (y==0) ? x :
              pred(diff(x,pred(y)));
}
```

SOTTRAZIONE: FUNZIONAMENTO

Cliente	*Chiama*
(main)	**diff(5,3)**
diff(5,3)	**pred(diff(5,2))**
diff(5,2)	**pred(diff(5,1))**
diff(5,1)	**pred(diff(5,0))**
diff(5,0) $\rightarrow$ ***5***	

pred(5) $\rightarrow$ ***4***

pred(4) $\rightarrow$ ***3***

pred(3) $\rightarrow$ ***2***

OPERATORI RELAZIONALI

```
int maggioreDiZero(int x){
   return (x==0) ? 0 : succ(0);
}

int minoreDiZero(int x, int y){
   return maggioreDiZero(diff(y,x));
}
```

OPERATORI LOGICI

```
int and(int p, int q){
     return  p ? q : 0;
}

int or(int p, int q){
     return  p ? p : q;
}
```

ALCUNI ESERCIZI

Obiettivo: esprimere la soluzione di alcuni problemi *per via funzionale*, *sfruttando la ricorsione*

- **Calcolo della funzione** $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

  $H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$

- **Calcolo della potenza k-esima**

  b^k con $b \in Z$, $k \geq 0$

PROBLEMA 1: H(n)

- H: N $\rightarrow$ R (int $\rightarrow$ double)

  H(n) = 1 + 1/2 +1/3 + ... + 1/n

- **Per n>1** la funzione si riscrive come:

  H(n) = (1 + 1/2 +1/3 + ... + 1/(n-1)) **+ 1/n**

  ossia come

  H(n) = H(n-1) + 1/n

  mentre, ovviamente, **H(1)=1**

PROBLEMA 1: H(n)

- Dunque,

  H(n) = 1 **per n=1**

  H(n) = 1/n + H(n-1) **per n>1**

- da cui:

```
double H(int n){
  return (n==1) ? 1
                : 1.0/n + H(n-1);
}
```

PROBLEMA 2: b^k con $b \in Z$, $k \geq 0$

- **power**: R×N → R (double×int → double)

  $b^k = 1$ per k=0

  $b^k = b * b^{k-1}$ per k>0

- da cui:

```
double power(double b, int k){
  return (k==0) ? 1
                : b*power(b,k-1);
}
```

ALTRI ESERCIZI

Obiettivo: esprimere la soluzione di alcuni problemi *per via funzionale*, *sfruttando la ricorsione*

- **Calcolo del valore di un polinomio di grado n a coefficienti unitari**

  $P(x,n) = x^0 + x^1 + \ldots x^n$

- **Fattoriale "innovativo"**

PROBLEMA 3: POLINOMIO

- **Calcolo del valore di un polinomio di grado n≥0 *a coefficienti unitari***

  $P(x,n) = x^0 + x^1 + \ldots x^n$

- **Per n>0** P(x,n) si riscrive come:

  $P(x,n) = (x^0 + x^1 + \ldots x^{n-1}) + x^n$

  ossia come

  $P(x,n) = P(x,n-1) + x^n$

  mentre, ovviamente, $P(x,0)=1$

PROBLEMA 3: POLINOMIO

- Dunque,

  $pol(x,n) = 1$ per n=0

  $pol(x,n) = x^n + pol(x,n-1)$ per n>0

- da cui:

```
double pol(double x, int n){
  return (n==0) ? 1
        : power(x,n) + pol(x,n-1);
}
```

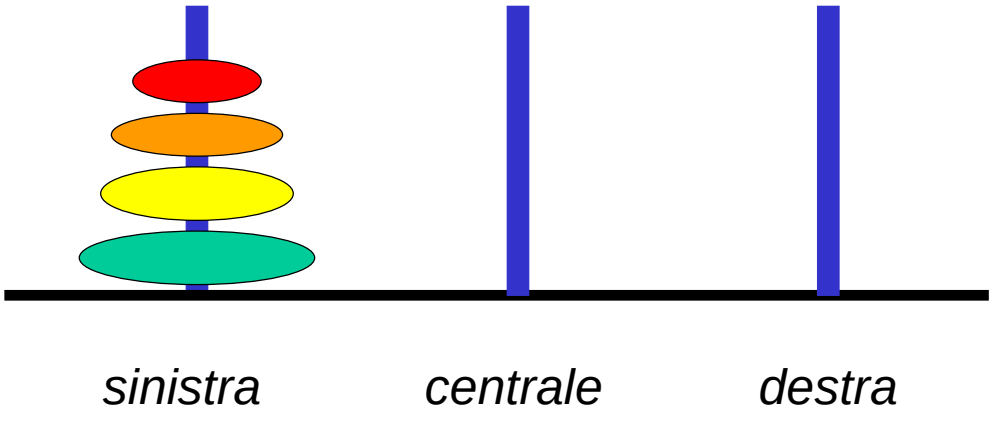
ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

- Sono date tre torri (*sinistra*, *centrale*, e *destra*) e un certo numero *N* di dischi forati
- I dischi hanno diametro diverso gli uni dagli altri, e inizialmente sono infilati uno sull'altro (dal basso in alto) dal più grande al più piccolo sulla torre di sinistra
- Scopo del gioco è *portarli tutti sulla torre di destra*, rispettando due regole:

  a) si può muovere un solo disco alla volta

  b) un disco grande non può mai stare sopra un disco più piccolo

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi



ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Come risolvere il problema?

- Immaginare la serie di mosse che, *in generale*, risolve il problema è impensabile
- Invece, è abbastanza semplice esprimere una soluzione ricorsiva

Ipotesi:

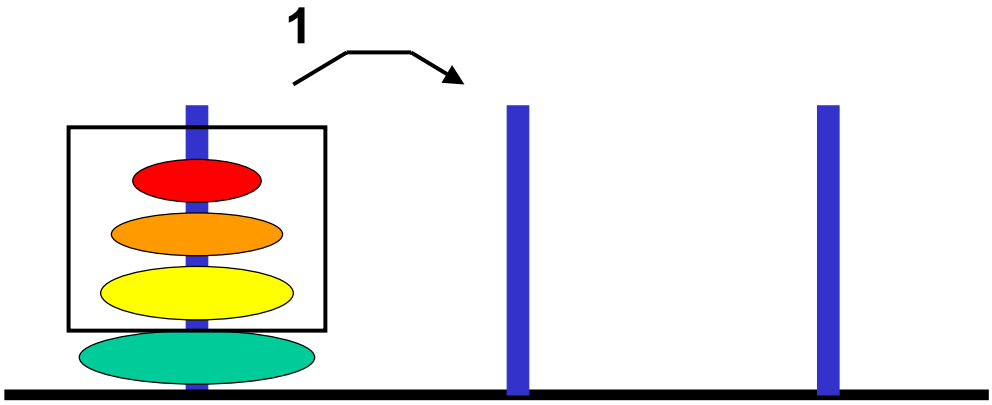
- Siamo capaci di spostare un singolo disco tra due torri a scelta

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Soluzione ricorsiva

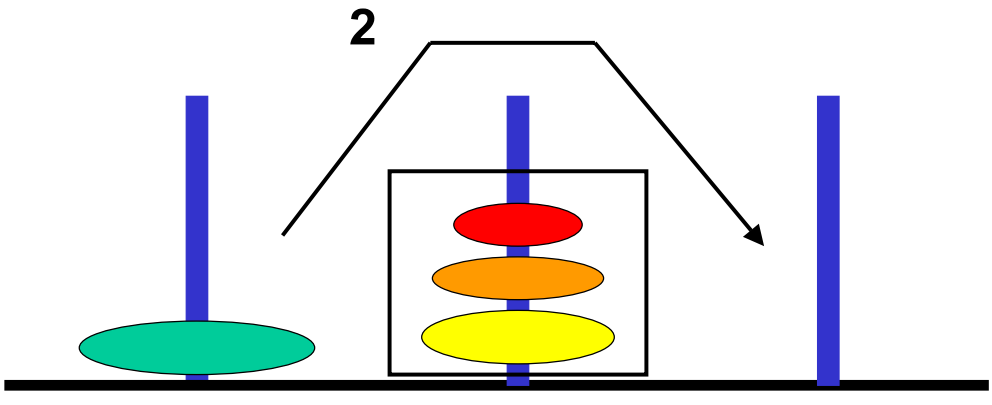
- *Caso banale*: un singolo disco si sposta direttamente dalla torre iniziale a quella finale
- *Caso generale*: per spostare N dischi dalla torre iniziale a quella finale occorre
  - spostare N-1 dischi dalla torre iniziale a quella intermedia, che funge da appoggio
  - spostare il disco rimanente (il più grande) direttamente dalla torre iniziale a quella finale
  - spostare gli N-1 dischi "posteggiati" sulla torre intermedia dalla torre intermedia a quella finale

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi



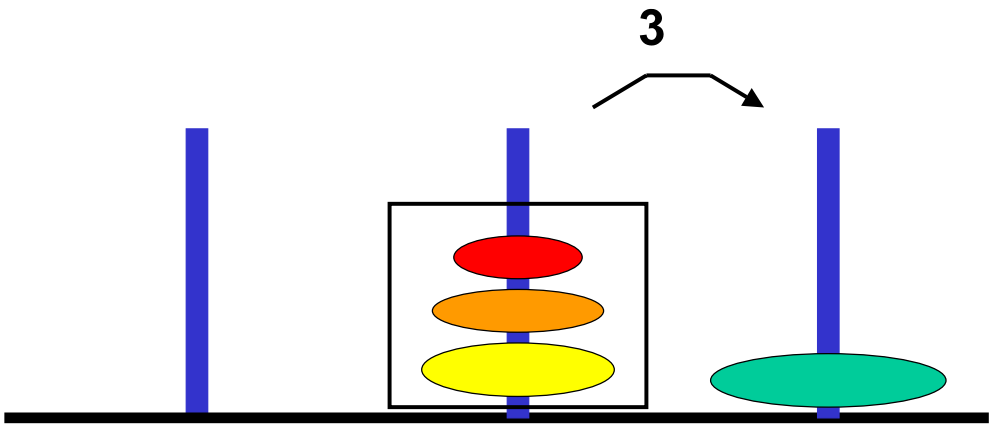
sinistra *centrale* *destra*

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi



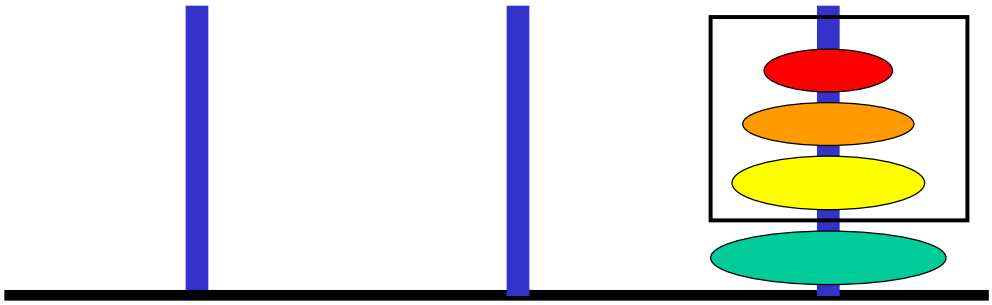
sinistra *centrale* *destra*

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi



sinistra *centrale* *destra*

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi



sinistra *centrale* *destra*

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

La soluzione delineata per il caso "N dischi" presuppone

- di sapere spostare N-1 dischi
  → ***stesso problema in un caso più semplice***
- di sapere spostare un singolo disco
  → ***abilità che possediamo per ipotesi***

È una ricorsione *non lineare*

- il problema con N dischi si esplode in due sottoproblemi con N-1 dischi
- con N dischi, 2^N-1 attivazioni della funzione

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Specifica

- rappresentiamo le tre torri con un intero
- rappresentiamo ogni mossa tramite *la coppia di torri coinvolte* (in futuro le scriveremo sull'output)
- la funzione **`hanoi`** ha come parametri
  - *il numero di dischi da spostare*
  - *la torre iniziale*
  - *la torre finale*
  - *la torre da usare come appoggio*
- non ha tipo di ritorno, è una procedura → **`void`**

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Interfaccia

```
void hanoi(int dischi, int torreIniziale,
  int torreFinale, int torreTransito);
```

Codifica

```
void hanoi(int dischi, int iniziale,
           int finale, int transito){
  if (dischi==1) {
     /* muovi da iniziale a finale */
  } else {
  hanoi(dischi-1, iniziale, transito, finale);
     /* muovi da iniziale a finale */
  hanoi(dischi-1, transito, finale, iniziale);
  }
}
```

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Alcune domande

- come avremmo fatto senza la ricorsione?
- senza debugger, che cosa "computa" alla fine?

Alcune proposte

- costruire un idoneo cliente e provare il programma
- provare, in un caso semplice, a seguire quello che accade passo per passo
- inserire al posto dei commenti delle istruzioni di stampa a video

ESERCIZIO: la Torre di Hanoi

Codifica

```
void hanoi(int d, int iniziale,
           int finale, int transito){
  if (d==1) {
  printf("Muovi un disco dalla torre %d "
       "alla torre %d\n", iniziale, finale);
  } else {
  hanoi(d-1, iniziale, transito, finale);
  printf("Muovi un disco dalla torre %d "
       "alla torre %d\n", iniziale, finale);
  hanoi(d-1, transito, finale, iniziale);
  }
}
```