

# TIPOLOGIE ESERCIZI SUI VINCOLI

---

- Si hanno due categorie di esercizi:
  - Modellazione + risoluzione
  - Risoluzione data la modellazione sotto forma di variabili e vincoli oppure di grafo
- Per la risoluzione:
  - Tecniche di consistenza sul problema originale
  - Algoritmi di propagazione + ricerca
  - Tecniche di consistenza + ricerca

# ESERCIZIO 1

---

Si hanno 4 insegnanti a, b, c e d che devono tenere complessivamente 10 lezioni. Ogni lezione può essere tenuta da un solo insegnante. Delle 10 lezioni si conoscono l'inizio  $S_i$  e la durata  $D_i = 2$  ore. Inoltre, si sa che nessun insegnante può tenere due lezioni consecutive e nemmeno lezioni sovrapposte temporalmente. Si rappresenti il problema come problema di soddisfacimento di vincoli definendo le variabili, i domini delle variabili e i vincoli tra queste. Si supponga inoltre che le lezioni abbiano i seguenti inizi:

- $S_1 = 7$
- $S_2 = 8$
- $S_3 = 9$
- $S_4 = 10$
- $S_5 = 11$
- $S_6 = 12$
- $S_7 = 13$
- $S_8 = 14$
- $S_9 = 15$
- $S_{10} = 16$

e durata di due ore. Si imposti la soluzione del problema utilizzando come tecnica il forward checking.

# SOLUZIONE: MODELLAZIONE

---

**Variabili:** ore di lezione  $X_1 \dots X_{10}$

**Domini:** insegnanti  $[a, b, c, d]$

Le ore di lezione sono caratterizzate da un inizio  $S_i$  e da una durata  $D_i$  nota.

**Vincoli:**

Unari: appartenenza delle variabili ai domini

Binari:

- Ogni ora di lezione può essere tenuta da un solo insegnante: ogni variabile viene istanziata con un solo valore.
- Ogni insegnante non può tenere due ore consecutive di lezione:  
 $S_i + D_i = S_j \rightarrow X_i \neq X_j$
- Ogni insegnante non può tenere due ore sovrapposte di lezione:  
 $S_i + D_i \text{ (fine di } i) > S_j \text{ and } S_i + D_i \leq S_j + D_j \text{ (fine di } j) \rightarrow X_i \neq X_j$ .

# SOLUZIONE: RICERCA

---

Inizialmente  $X_1 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$

- Istanzio  $X_1 = a$
- Propago:  $X_2 \ X_3 :: [b,c,d]$ ,  $X_4 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_2 = b$
- Propago:  $X_3 :: [c,d]$ ,  $X_4 :: [a,c,d]$ ,  $X_5 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_3 = c$
- Propago:  $X_4 :: [a,d]$ ,  $X_5 :: [a,b,d]$ ,  $X_6 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_4 = a$
- Propago:  $X_5 :: [b,d]$ ,  $X_6 :: [b,c,d]$ ,  $X_7 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_5 = b$
- Propago  $X_6 :: [c,d]$ ,  $X_7 :: [a,c,d]$ ,  $X_8 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_6 = c$
- Propago  $X_7 :: [a,d]$ ,  $X_8 :: [a,b,d]$ ,  $X_9 \dots X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_7 = a$
- Propago  $X_8 :: [b,d]$ ,  $X_9 :: [b,c,d]$ ,  $X_{10} :: [a,b,c,d]$
- Istanzio  $X_8 = b$
- Propago  $X_9 :: [c,d]$ ,  $X_{10} :: [a,c,d]$
- Istanzio  $X_9 = c$
- Propago  $X_{10} :: [a,d]$
- Istanzio  $X_{10} = a$  soluzione

# OSSERVAZIONE

---

- Si noti che esiste un'altra possibile rappresentazione del problema che associa agli insegnanti una variabile il cui dominio contiene inizialmente tutte le lezioni. I vincoli potrebbero eliminare dai domini quelle lezioni che sono incompatibili con i vincoli sull'insegnante. Tuttavia, questa rappresentazione non rientra nell'ottica dei problemi di soddisfacimento di vincoli in quanto in una soluzione deve essere assegnato UNO E UN SOLO valore a ogni variabile e non un insieme di valori come nel caso di questa seconda rappresentazione. Infatti, in quest'ultimo caso una possibile soluzione avrebbe
- $X_a::[1,4,7]$

che dovrebbe significare che il maestro a può tenere le lezioni 1, 4 e 7 mentre i vincoli unari hanno come semantica l'or. Si potrebbe pensare ad un dominio di insiemi ma complica molto la trattazione.

## ESERCIZIO 2

---

Data una scacchiera 4 x 4 e 4 colori [r,b,g,y], si deve collocare un colore in ciascuna cella della scacchiera in modo che ogni riga, ogni colonna e le due diagonali principali della scacchiera contengano colori diversi.

Si formalizzi il problema come CSP, e lo si risolva fino alla prima soluzione tramite la tecnica del forward checking con euristica first-fail (anche detta Minimum Remaining Values MRV)

### SOLUZIONE

- Si considera una scacchiera 4 x 4. Ogni cella della scacchiera rappresenta una variabile da  $X_{1,1}$  a  $X_{4,4}$ . I domini iniziali delle variabili sono composti dai quattro colori a disposizione.
- I vincoli sono
- per ogni  $i$   $X_{ij} \neq X_{ik}$  per  $j \neq k$
- per ogni  $i$   $X_{ji} \neq X_{ki}$  per  $j \neq k$
- per ogni  $i$  e  $j$   $X_{ii} \neq X_{jj}$  con  $i \neq j$
- per ogni  $i$  e  $j$   $X_{i,4-i+1} \neq X_{j,4-j+1}$  con  $i \neq j$
- Rappresentiamo i domini all'interno delle celle della scacchiera. Con il forward checking si arriva ad una soluzione senza mai fallire.

# ESERCIZIO 2

r,b	r,b	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
r,b	r,b	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
r,b	r,b	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
r,b	r,b	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g

X11=r



r	b	b	b
y,g	y,g	y,g	y,g
b	b	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
b	r,b	b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
b	r,b	r,b	b
y,g	y,g	y,g	y,g

X12=b



r	b	y,g	y,g
b	y,g	r,b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
b	r	b	r,b
y,g	y,g	y,g	y,g
b	r	r,b	b
y,g	y,g	y,g	y,g

X13=y

r	b	y	g
b	y,g	r,b	r,b
y,g	y,g	g	y,g
b	r	b	r,b
y,g	y,g	g	y,g
b	r	r,b	b
y,g	y,g	g	y,g

X14=g



r	b	y	g
b	y,g	r,b	r,b
y,g	y,g	r,b	y
b	r	b	r,b
y,g	y	g	y
b	r	r,b	b
y	y,g	g	y

X22=y



r	b	y	g
b	y	r,b	r,b
g	y	r,b	r,b
b	r	b	r,b
y,g	y	g	y
b	r	r,b	b
y	g	g	b

X32=r

r	b	y	g
b	y	b	r,b
g	y	b	r,b
b	r	b	b
y,g	r	g	y
b	g	r,b	b
y	g	g	b

X23=b



r	b	y	g
g	y	b	r
b	y	b	r
y,g	r	g	b
b	y	b	y
y	g	r	b
y	g	g	b

X24=r



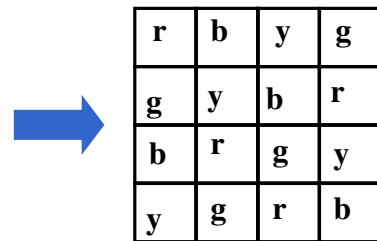
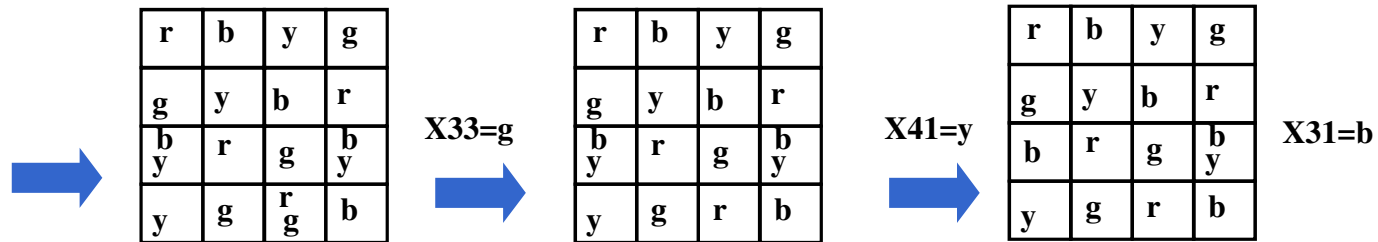
r	b	y	g
g	y	b	r
b	y	b	r
y,g	r	g	b
b	y	b	y
y	g	rg	b
y	g	rg	b

X21=g



# ESERCIZIO 2

---



Più quattro stati identici all'ultimo relativi alle istanziazioni di X34 a y, X42 a g, X43 a r e X44 a b. SOLUZIONE CONSISTENTE



## ESERCIZIO 3

---

- Si supponga di avere a disposizione i seguenti vincoli:  
 $X < Y, X \neq K, Y + 5 \leq K, Y + 7 > Z, X \leq Z$   
definiti sulle variabili  $X, Y, Z, K$  il cui dominio di definizione è  $[1..20]$ .
- Si risolva il problema applicando la strategia di full look ahead.

IL MODELLO E' DATO

$X < Y, X \neq K, Y + 5 \leq K, Y + 7 > Z, X \leq Z$

$X, Y, Z, K :: [1..20]$

# SOLUZIONE

---

- Istanzio  $X=1$
- Propagazione full look ahead:
  - $Y::[2..15]$ ,  $K::[7..20]$ ,  $Z::[1..20]$
- Istanzio:  $Y=2$ 
  - $K::[7..20]$ ,  $Z::[1..8]$
- Istanzio:  $K=7$ 
  - $Z::[1..8]$
- Istanzio:  $Z = 1$  soluzione

# ESERCIZIO 4

---

- Si devono visitare 6 clienti A, B, C, D, E, F nell'arco della giornata lavorativa (dalle 9 alle 19). (durata implicita 1 ora)
  - Due clienti non possono essere visitati contemporaneamente.
  - Si sa che i clienti C ed F devono essere visitati prima del cliente D.
- A è un cliente fuori città, mentre B, C, D, E ed F sono tutti in centro. Quindi, per spostarsi da A a ogni altro cliente si impiega 1 ora, mentre qualunque spostamento in centro città viene effettuato a tempo trascurabile (=0).
  - Il cliente C può essere visitato solo dalle 15 alle 17.
- Si modelli il problema in termini di variabili e vincoli. Si mostri l'albero di ricerca fino alla prima soluzione relativo alla strategia standard backtracking e quello relativo al forward checking e si commentino i risultati.

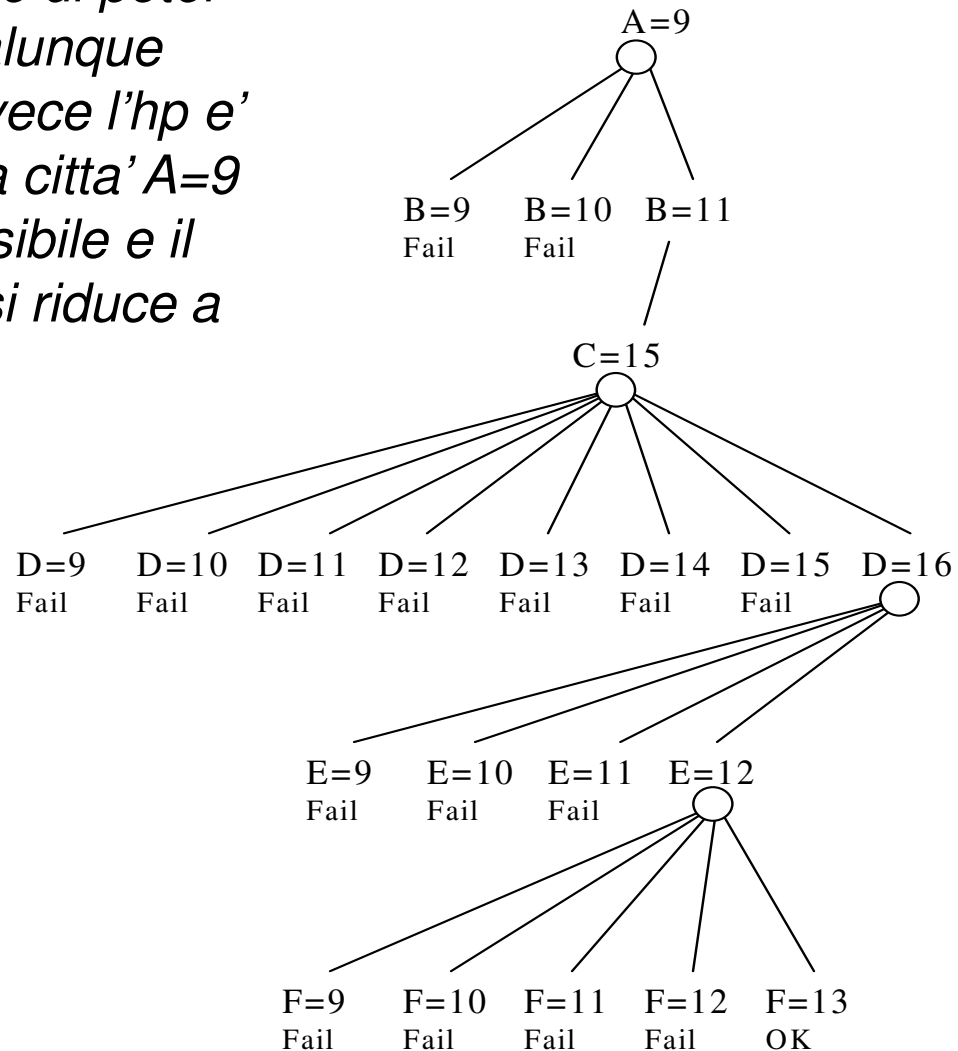
# SOLUZIONE

---

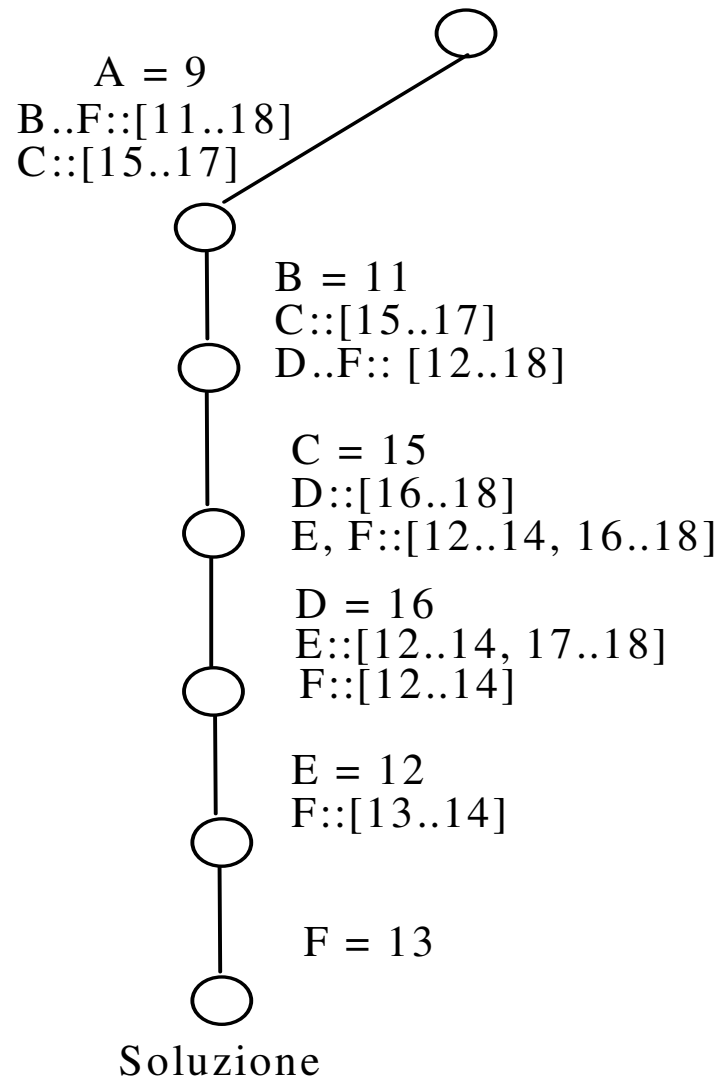
- Variabili: clienti
- Domini: possibili orari di visita A, B, C, D, E, F::[9..18]
- Vincoli:
  - Due clienti non possono essere visitati contemporaneamente:  
per  $\forall X, Y \quad X \neq Y$
  - I clienti C ed F devono essere visitati prima del cliente D:  
 $C < D \quad F < D$
  - A è un cliente fuori città, mentre B, C, D, E e F sono tutti in centro. Quindi, per spostarsi da A ad ogni altro cliente si impiega 1 ora, mentre qualunque spostamento in centro città viene effettuato a tempo trascurabile (=0).  
 $\forall X \in [B, C, D, E, F] \quad A \geq X + 2 \quad \text{OR} \quad X \geq A + 2$
  - Il cliente C può essere visitato solo dalle 15 alle 17.
  - Vincolo unario su C che riduce il suo dominio  
 $C \geq 15 \quad \text{e} \quad C \leq 17$

# STANDARD BACKTRACKING

*Hp: si suppone di poter partire da qualunque cliente. Se invece l'hp e' di partire dalla citta' A=9 non e' ammissibile e il dominio di A si riduce a A:[11..18]*



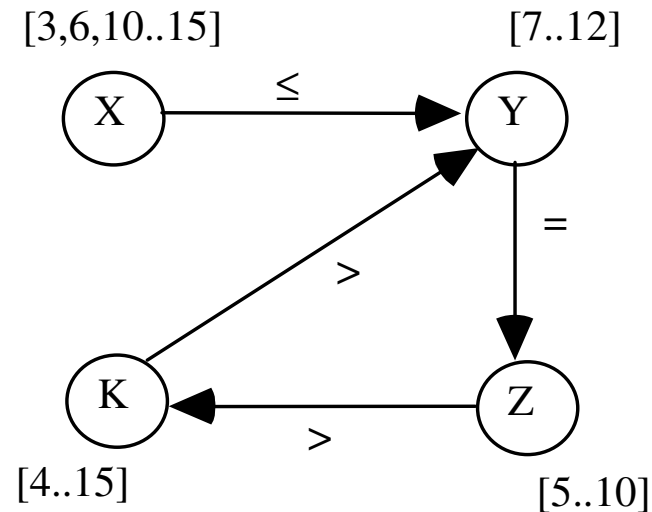
# FORWARD CHECKING



*SI NOTI che non  
ci sono rami di fallimento  
e conseguenti  
backtracking contro i 16  
fallimenti dello std. back.*

## ESERCIZIO 5

Si consideri la seguente rete di vincoli



$X :: [3, 6, 10..15]$ ,  $Y :: [7..12]$ ,  $K :: [4..15]$ ,  
 $Z :: [5..10]$ ,  $Y = Z$ ,  $Z < K$ ,  $K > Y$ ,  $X \leq Y$

E si applichi l'arc-consistenza. Si discuta inoltre cosa accade applicando l'arc-consistenza alla stessa rete se si introduce un vincolo ulteriore  $X = K$ .

# SOLUZIONE

---

$X :: [3, 6, 10..15], Y :: [7..12], K :: [4..15],$   
 $Z :: [5..10], Y = Z, Z < K, K > Y, X \leq Y$

Risultato dell'arc-consistency (Si applichi l'argoritmo AC considerando gli archi)

$X = [3, 6, 10]$

$Z = [7..10]$

$K = [8..15]$

$Y = [7..10]$

Introducendo il nuovo vincolo si riporta fallimento. Si noti la computazione incrementale



# ESERCIZIO 6

---

- Dati i seguenti vincoli:

$A :: [1..4], B :: [1..4], C :: [2, 4, 6],$

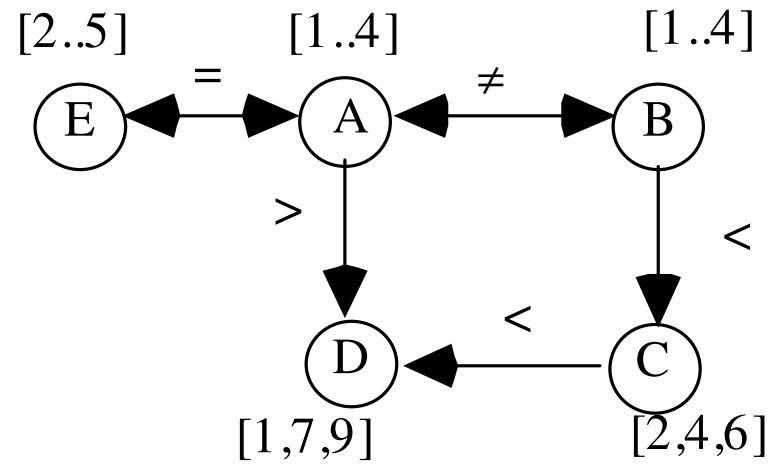
$D :: [1, 7, 9], E :: [2..5],$

$A > D, A \neq B, B < C, C > D, E = A$

- Si disegni il grafo corrispondente al problema di soddisfacimento di vincoli e si applichi l'arc-consistenza. Si disegni l'albero per arrivare alla prima soluzione usando come euristica di assegnamento di valori alle variabili il first-fail (MRV) e ad ogni istanziazione si riapplichi l'arc-consistenza alla rete residua.

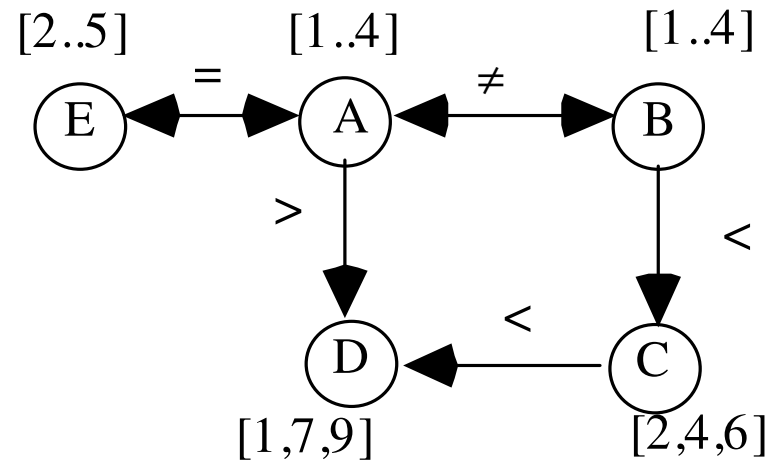
# SOLUZIONE

Grafo corrispondente al problema



# SOLUZIONE

Grafo corrispondente al problema



Dopo l'applicazione dell'arc-consistenza al problema originale si ottiene

**A** : : [2..4]

**B** : : [1..4]

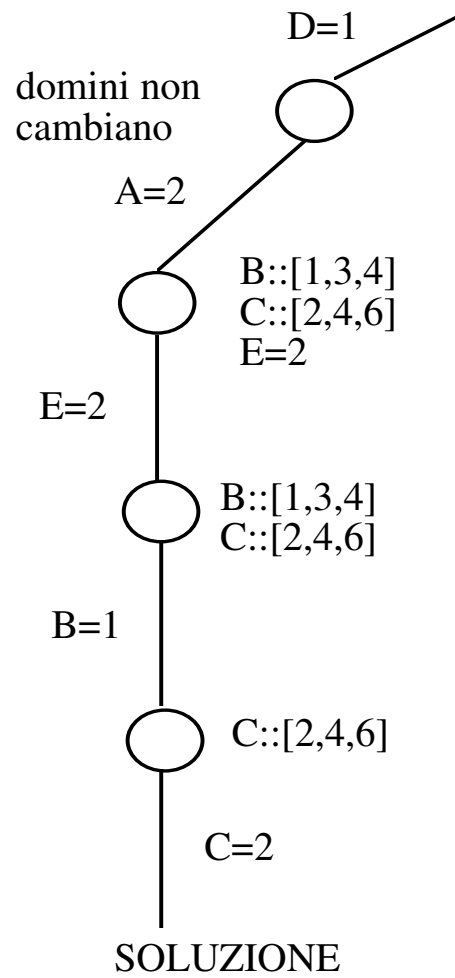
**C** : : [2, 4, 6]

**D** = 1

**E** : : [2..4]

# RICERCA

---



SOLUZIONE

A = 2, B = 1, C = 2, D = 1, E = 2