Logica, alberi SLD e SLDNF

Esercizi – venerdì 4 giugno 2010

- *Scopo:*
  1. Esercizi sulla logica dei predicati del primo ordine
  2. Esercizi su alberi di risoluzione SLD e SLDNF

CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

  $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \vee \sim B_1 \vee ... \vee \sim B_m$

  dove A_i (i=1,..,n) e B_j (j=1,..,m) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta clausola vuota e verrà indicata con □, interpretato come contraddizione: disgiunzione falso $\vee$ ~vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

  $A_1 \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Passi per trasformare una qualunque fbf della logica dei predicati del primo ordine in un insieme di clausole
- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

  Esempio la formula:

  – $\forall X\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (1)

  è trasformata in:

  – $\forall X\ \forall Y\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (2)

- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

  La formula (2) diventa:

  – $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y\ (\sim q(X,Y) \vee p(Y))))$ (3)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

  $\forall X \sim A$ equivale a $\sim \exists X\ A$

  $\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X\ A$

  $\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$

  $\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$

  (leggi di De Morgan).

  (3) si modifica in:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Y\ (q(X,Y) \wedge \sim p(Y))))$ (4)

- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

  in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Z\ (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))))$ (5)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

  $\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))$ (6)

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

  $\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z)))$ (7)

- 7) **Skolemizzazione:** ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

  Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \, \exists Y \, p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X \, p(X,g(X))$

  In (7) Z è sostituita da f(X,Y), perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

  $\forall X \forall Y \, ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (8)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire: F: $\exists$X p(X) oppure F': p(f).
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.
- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.
- $((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (9)
- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene: $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))\}$ (10)
- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).
- $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W,Z))\}$ (11)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

Proprietà

- Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

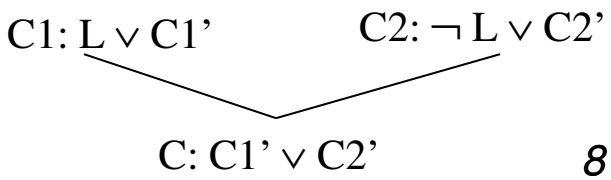
- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è molto più efficiente del metodo assiomatico-deduttivo ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.
- **Logica Proposizionale:** clausole prive di variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

  $C_1 = A_1 \vee ... \vee A_n$ $\qquad\qquad$ $C_2 = B_1 \vee ... \vee B_m$

- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j, ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2, (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3, denominata **risolvente**, della forma:

  $C_3 = A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee .. \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee ... \vee B_m$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**



Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:

- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*

- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:

- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*

  $\forall$**H big(H)** $\wedge$ **house(H)** $\rightarrow$ **work(H)** $\vee$ **{**$\exists$**M cleans(M,H) and not** $\exists$ **G garden(G,H)}**

- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

Soluzione Esercizio 1

1. **Trasformazione in fbf chiuse**

2. **Elimino le implicazioni: A $\rightarrow$ B equivale a not A $\vee$ B**

   $\forall$ H not big(H) $\vee$ not house(H) $\vee$ work(H) $\vee$ {$\exists$ M cleans(M,H) $\wedge$ not $\exists$ G garden(G,H)}

3. **Riduzione del connettivo not a soli atomi e non più a formule composte**

   $\forall$ H not big(H) $\vee$ not house(H) $\vee$ work(H) $\vee$ {$\exists$ M cleans(M,H) $\wedge$ $\forall$ G not garden(G,H)}

4. **Cambiamento di nomi delle variabili (in caso di conflitti).**

Soluzione Esercizio 1

5. **Spostamento dei quantificatori in testa alla formula**

   $\forall$ **H** $\exists$ **M** $\forall$ **G not big(H)** $\vee$ **not house(H)** $\vee$ **work(H)** $\vee$ **{cleans(M,H)** $\wedge$ **not garden(G,H)}**

6. **Forma prenessa congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni)**

   $\forall$ **H** $\exists$ **M** $\forall$ **G ((not big(H)** $\vee$ **not house(H)** $\vee$ **work(H)** $\vee$ **cleans(M,H))** $\wedge$ **(not big(H)** $\vee$ **not house(H)** $\vee$ **work(H)** $\vee$ **not garden(G,H)))**

7. **Skolemizzazione**

   $\forall$ **H** $\forall$ **G ((not big(H)** $\vee$ **not house(H)** $\vee$ **work(H)** $\vee$ **cleans(f(H),H))** $\wedge$ **(not big(H)** $\vee$ **not house(H)** $\vee$ **work(H)** $\vee$ **not garden(G,H)))**

8. **Eliminazione dei quantificatori universali**

Soluzione Esercizio 1

Forma a clausole:

not big(H) $\vee$ not house(H) $\vee$ work(H) $\vee$ cleans(f(H),H)

not big(H) $\vee$ not house(H) $\vee$ work(H) $\vee$ not garden(G,H)

La frase non può essere trasformata in clausole di Horn a causa dei letterali positivi: infatti la prima clausola contiene due letterali positivi, mentre le clausole di Horn ne contengono al più uno.

Esercizio 2 - risoluzione

Si assumano i seguenti fatti:

- A Simone piacciono i corsi facili;
- I corsi di scienze sono difficili;
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.

Si usi la risoluzione per rispondere alla domanda: Quale corso piace a Simone?

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

- A Simone piacciono soltanto i corsi facili;

  $\forall$**X,** $\forall$**Y** **corso(Y,X), facile(X)** $\rightarrow$ **piace(simone,X)**
- I corsi di scienze sono difficili;

  $\forall$**X** **corso(scienze, X)** $\rightarrow$ **not facile(X)**
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;

  $\forall$**X** **corso(ai, X)** $\rightarrow$ **facile(X)**
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.

  corso(ai,bk301).

Goal G: $\exists$ **X piace(simone,X), corso(Y,X)**

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Forma a clausole:

- Gneg: not piace(simone,X) $\vee$ not corso(Y,X)
- C1: piace(simone,X) $\vee$ not corso(Y,X) $\vee$ not facile(X)
- C2: not facile(X) $\vee$ not corso(scienze,X)
- C3: facile(X) $\vee$ not corso(ai,X)
- C4: corso(ai,bk301)

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Risoluzione

C5 = G e C4 : not piace(simone, bk301) X/bk301 Y/ai

C6 = C3 e C4: facile(bk301)

C7 = C1 e C5: not corso(Y, bk301) $\vee$ not facile(bk301)

C8 = C6 e C7: not corso(Y,bk301)

C9 = C8 e C4: contraddizione

Esercizio 3 – compito del 5/11/2003

Si formalizzino le seguenti frasi in logica dei predicati:

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

Le si trasformi in clausole e si usi poi il principio di risoluzione per dimostrare che c'è uno studente di Ingegneria che non si contraddice.

Soluzione Esercizio 3

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.

  ∃**Y (studIng(Y) and conosce(Y,boole))**
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.

  ∀ **X (conosce(X,boole) => haLogica(X))**
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.

  ∀ **X (not haLogica(X) => contraddice(X))**
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.

  ∀ **X (contraddice(X) => not haLogica(X))**
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

  studIng(piero) and conosce(piero,boole)

Goal: ∃**Y studIng(Y) and not contraddice(Y)**

Soluzione Esercizio 3

Clausole:

- **C1 studIng(c)**
- **C2 conosce(c,boole)**
- **C3 not conosce(X,boole) or haLogica(X)**
- **C4 haLogica(X) or contraddice(X)**
- **C5 not contraddice(X) or not haLogica(X)**
- **C6 studIng(piero)**
- **C7 conosce(piero,boole)**

- **C8 not studIng(Y) or contraddice(Y)** (goal negato)

Soluzione Esercizio 3

Risoluzione:

- **C9 not haLogica(Y) or not studIng(Y)** (da C5 e C8)
- **C10 not conosce(Y,boole) or not studIng(Y)** (da C9 e C3)
- **C11 not conosce(piero,boole)** (da C10 e C6)
- **C12 Clausola vuota** (da C11 e C7)

Esercizio 4

Si consideri la seguente conoscenza:

Antonio, Michele e Giovanni sono iscritti al CAI (Club Alpino Italiano). Ogni appartenente al Club che non è sciatore è uno scalatore. Gli scalatori non amano la pioggia. Ogni persona che non ama la neve non è uno sciatore. Antonio non ama ciò che Michele ama. Antonio ama la pioggia e la neve.

Si rappresenti tale conoscenza come un insieme di predicati del primo ordine appropriati per un sistema di refutazione che lavori mediante risoluzione.

Si mostri come tale sistema risolverebbe la domanda: "**C'è un membro del CAI che è uno scalatore, ma non uno sciatore?**"

Soluzione Esercizio 4

Formule logiche:

1. ∀ X iscritto(X), not sciatore(X) → scalatore(X)

2. ∀ X scalatore (X) → not ama(X,pioggia)

3. ∀ X not ama(X,neve) → not sciatore(X)

4. ∀ X ama(michele,X) → not ama(antonio,X)

5. ama(antonio,neve)

6. ama(antonio, pioggia)

7. iscritto(antonio)

8. iscritto(michele)

9. iscritto(giovanni)

Goal: ∃ **X iscritto(X), scalatore(X), not sciatore(X)**

Soluzione Esercizio 4

Forma a clausole:

C1. not iscritto(X) $\vee$ sciatore(X) $\vee$ scalatore(X)

C2. not scalatore(X) $\vee$ not ama(X,pioggia)

C3. ama(X,neve) $\vee$ not sciatore(X)

C4. not ama(michele,X) $\vee$ not ama(antonio,X)

C5. ama(antonio,neve)

C6. ama(antonio, pioggia)

C7. iscritto(antonio)

C8. iscritto(michele)

C9. iscritto(giovanni)

Gneg: not iscritto(X) $\vee$ not scalatore(X) $\vee$ sciatore(X)

Soluzione Esercizio 4

Risoluzione

C10=Gneg - C8

not scalatore(michele) $\vee$ sciatore(michele) {X/michele}

C11=C10 - C3

not scalatore(michele) $\vee$ ama(michele,neve)

C12=C11-C4

not scalatore(michele) $\vee$ not ama(antonio,neve)

C13=C12 e C5 not scalatore(michele)

C14=C13 e C1 not iscritto(michele) Ú sciatore(michele)

C15=C13 e C8 sciatore(michele)

C16=C15 e C3 ama(michele,neve)

C17=C16 e C4 not ama(antonio,neve)

C18=C17 e C5 clausola vuota

Esercizio 5 - SLD

Si consideri il seguente programma Prolog:

```
superclasse(X,Y):- classe(X,Y).
superclasse(X,Z):- classe(W,Z),
                   superclasse(X,W).
```

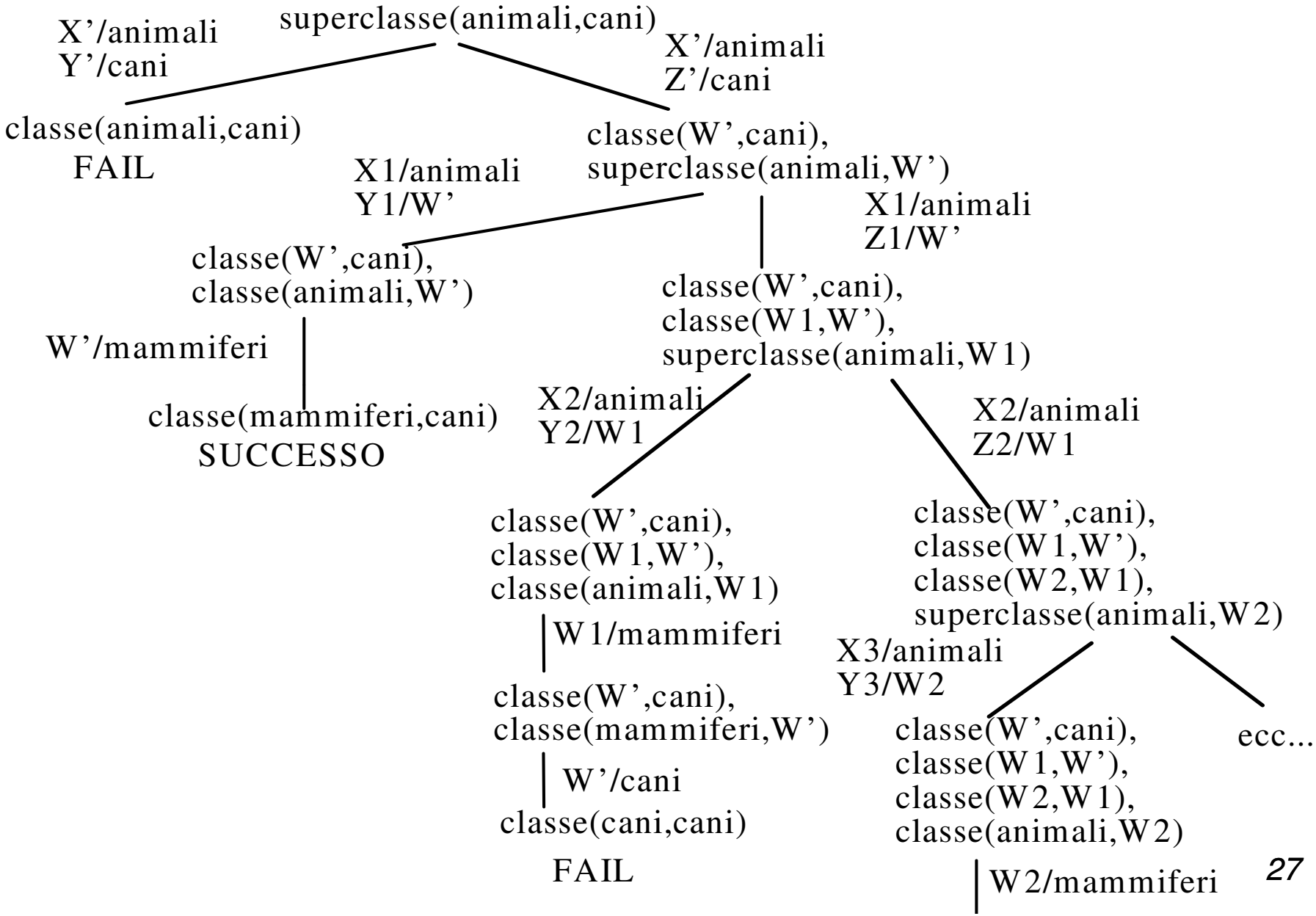
Si rappresenti l'albero SLD con regola di selezione right-most relativo al goal:

```
:- superclasse(animali, cani)
```

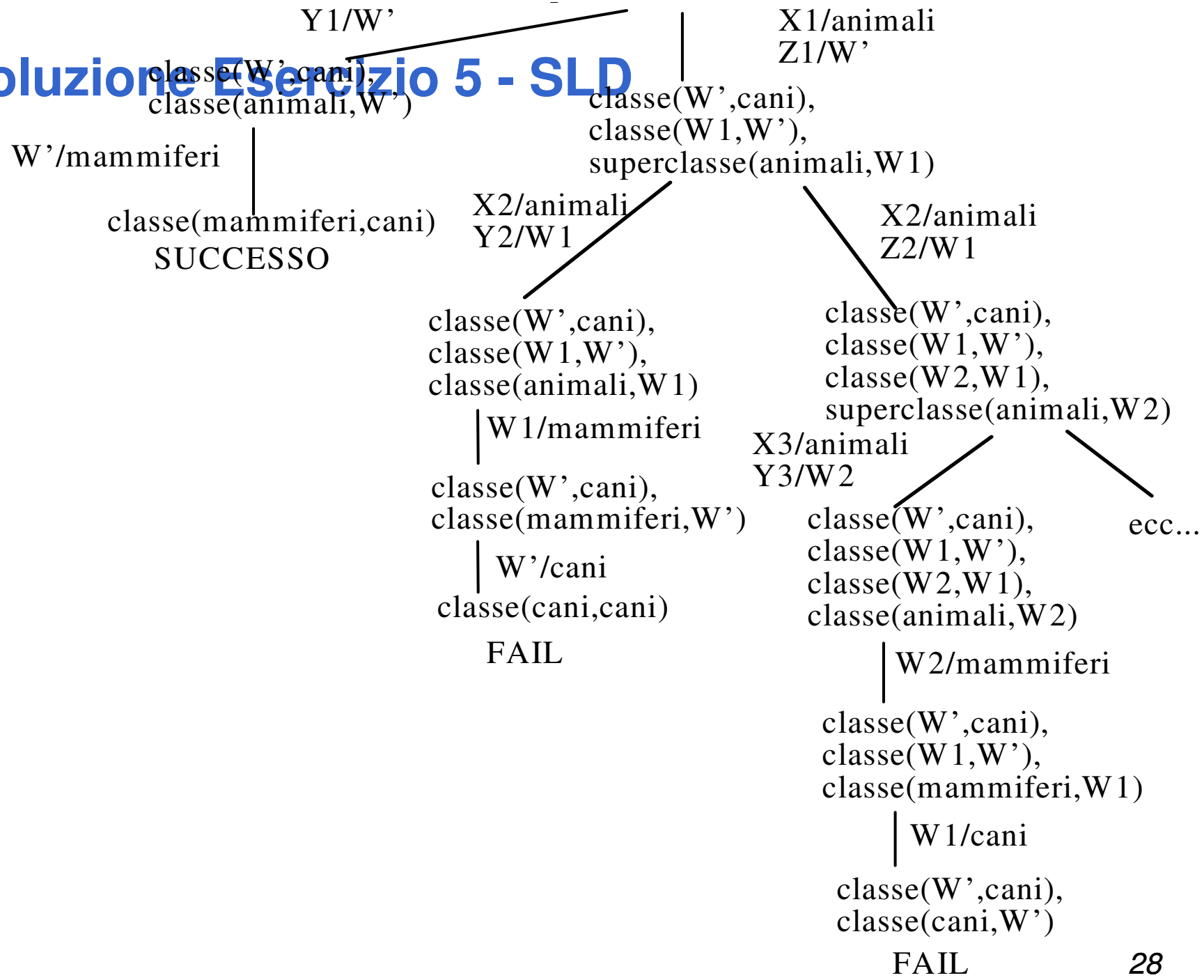
assumendo la presenza, all'inizio del database, dei fatti:

```
classe(mammiferi,cani).
classe(animali,mammiferi).
```

Soluzione Esercizio 5 - SLD



Soluzione Esercizio 5 - SLD



Esercizio 6 – SLD & cut

Si consideri il seguente programma Prolog:

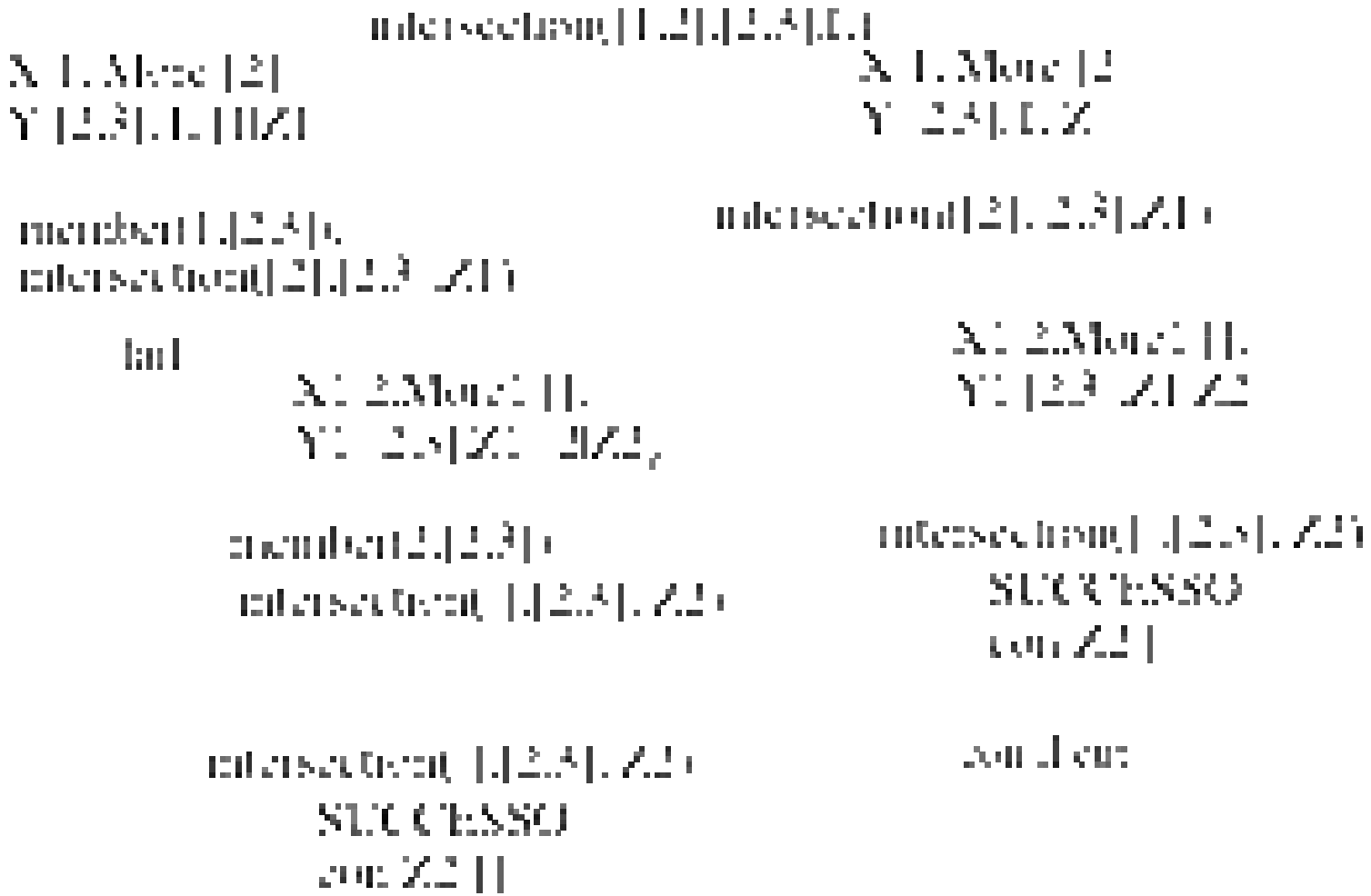
```
intersection([],X,[]).
intersection([X|More],Y,[X|Z]):-
   member(X,Y),
   intersection(More,Y,Z).
intersection([X|More],Y,Z):-  intersection(More,Y,Z).
```

Si rappresenti l'albero SLD relativo al goal

```
:- intersection([1,2],[2,3],L).
```

e si indichino i rami di successo. Si indichi come l'utilizzo del cut (!) possa portare alla definizione corretta del predicato intersezione.

Soluzione Esercizio 6 – SLD & cut



Esercizio 7 – SLDNF

Si consideri il seguente programma Prolog:

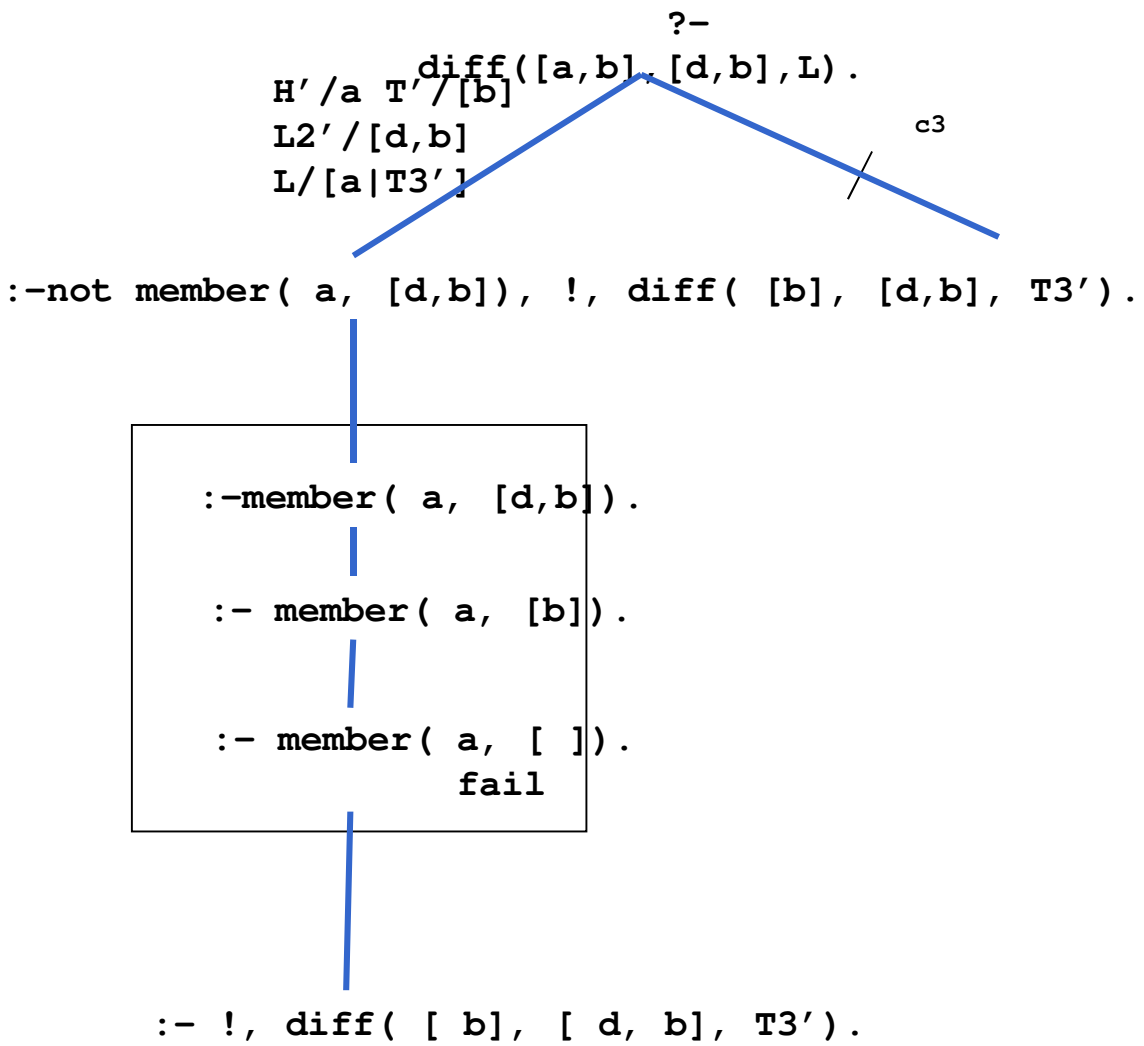
```
diff([],_,[]):- !.
diff( [H|T], L2, [H|T3]):- not member( H, L2),!,
                                    diff( T, L2, T3).
diff( [_|T], L2, T3):- diff( T, L2, T3).

member( X, [X|_]):-  !.
member( X, [_|T]):-  member(X,T).
```

Si rappresenti l'albero SLD relativo al goal

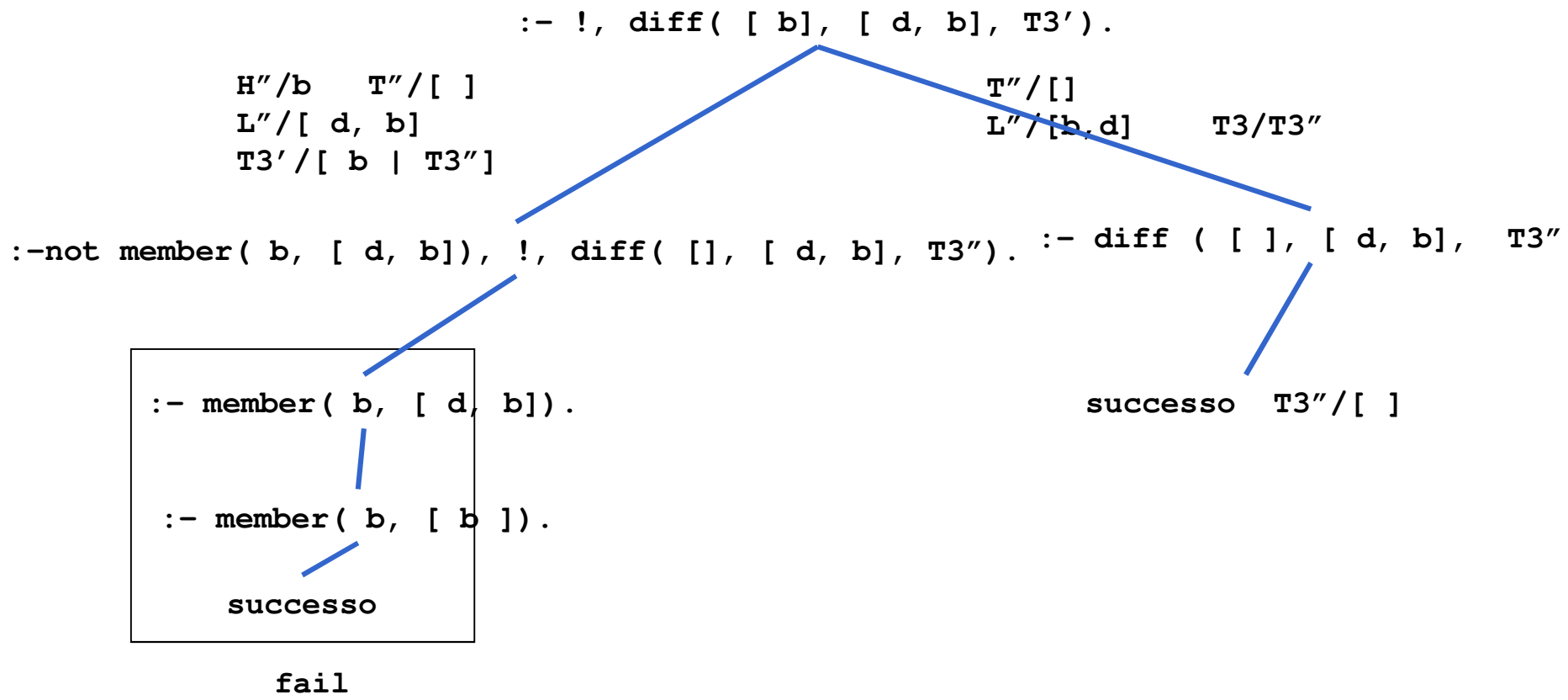
```
:- diff( [a,b], [d,b], L).
```

e si indichino i rami di successo. Si indichi come l'utilizzo del cut (!) possa portare alla definizione corretta del predicato intersezione.

Soluzione Esercizio 7 – SLDNF



Soluzione Esercizio 7 – SLDNF



Esercizio 8 – Compito del 5 / 11 / 2003

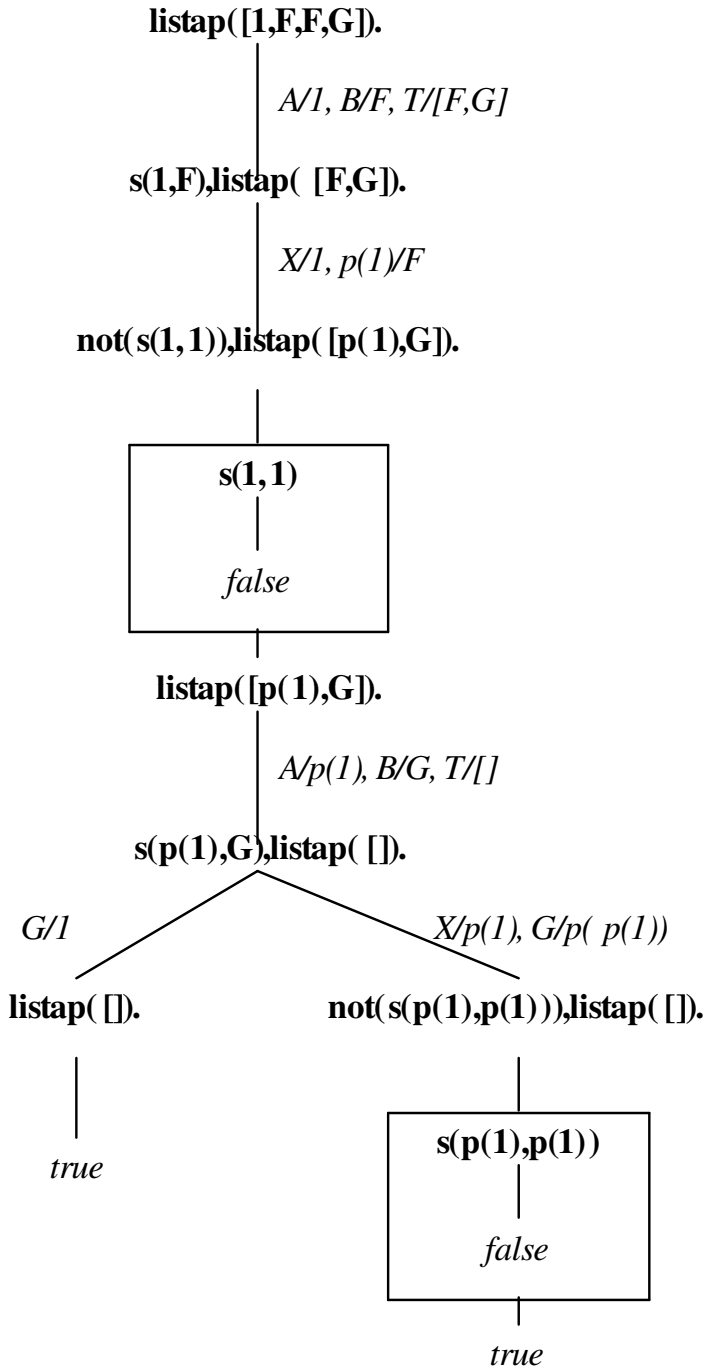
Si consideri il seguente programma Prolog:

```
listap([]).
listap([ A, B | T]):-
  s( A, B),
  listap(T).

s( p(X), X).
s( X,p(X)):-
  not(s(X,X)).
```

Si rappresenti l'albero SLDNF corrispondente al seguente goal:

```
listap([1,F,F,G]).
```

Soluzione Esercizio 8 – Compito del 5/11/2003



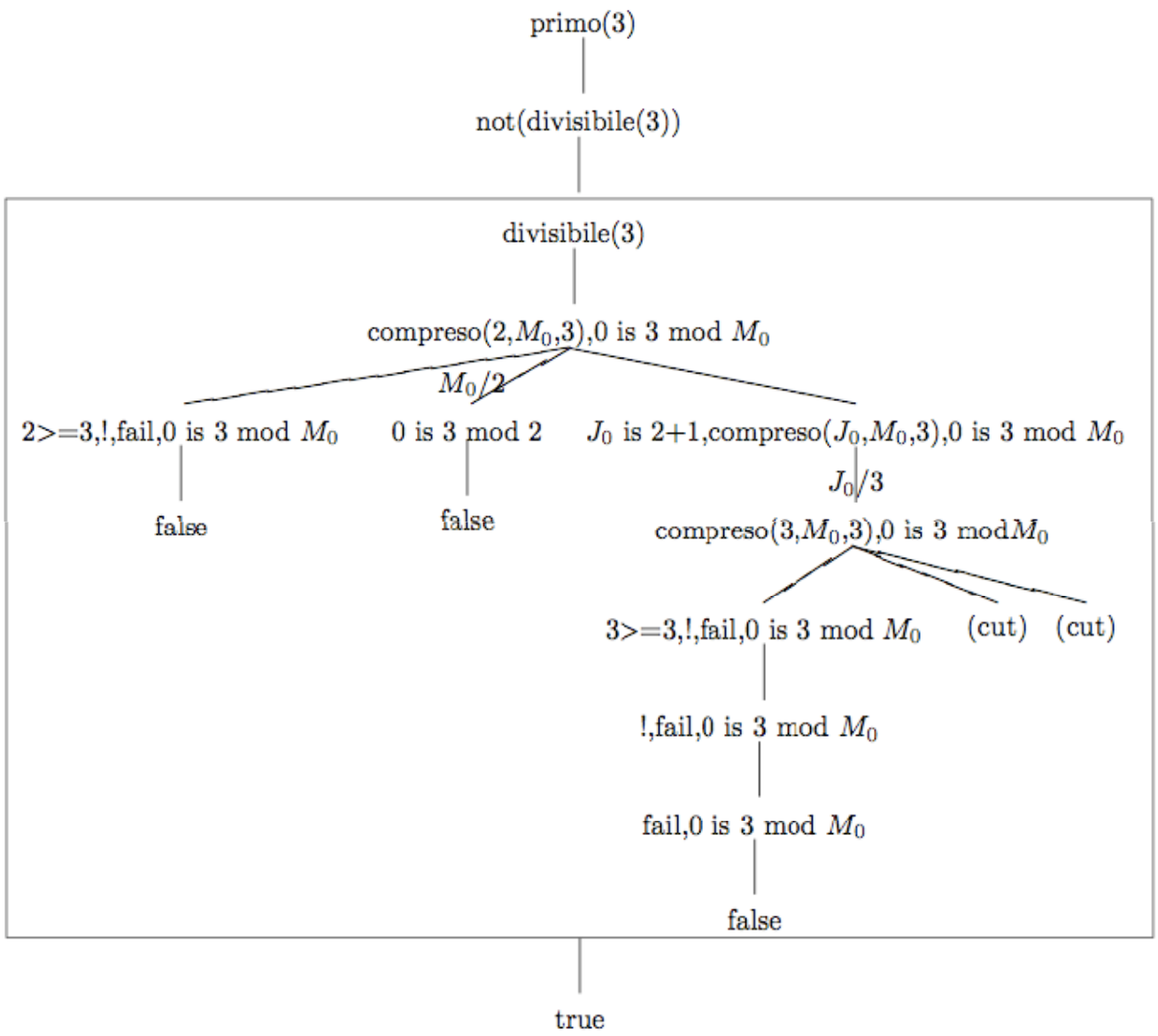
Esercizio 9 – Compito del 20 / 12 / 2004

- Si consideri il seguente programma Prolog che calcola se un numero è primo (dove *mod* calcola il modulo, cioè il resto della divisione intera):

```
primo(N):- not(divisibile(N)).
divisibile(N):- compreso(2,M,N),0 is N mod M.

compreso(I,X,S):- I>=S, !, fail.
compreso(I,I,S).
compreso(I,X,S):- J is I+1, compreso(J,X,S).
```

- Si disegni l'albero SLDNF relativo al goal:

```
?- primo(3).
```


primo(3)
not(divisibile(3))
divisibile(3)
compreso(2,M_0,3),0 is 3 mod M_0
$M_0/2$
2>=3,!,fail,0 is 3 mod M_0
0 is 3 mod 2
J_0 is 2+1,compreso(J_0,M_0,3),0 is 3 mod M_0
$J_0/3$
false
false
compreso(3,M_0,3),0 is 3 modM_0
3>=3,!,fail,0 is 3 mod M_0
(cut)
(cut)
!,fail,0 is 3 mod M_0
fail,0 is 3 mod M_0
false
true

Esercizio 10 - compito del 16 dicembre 2005

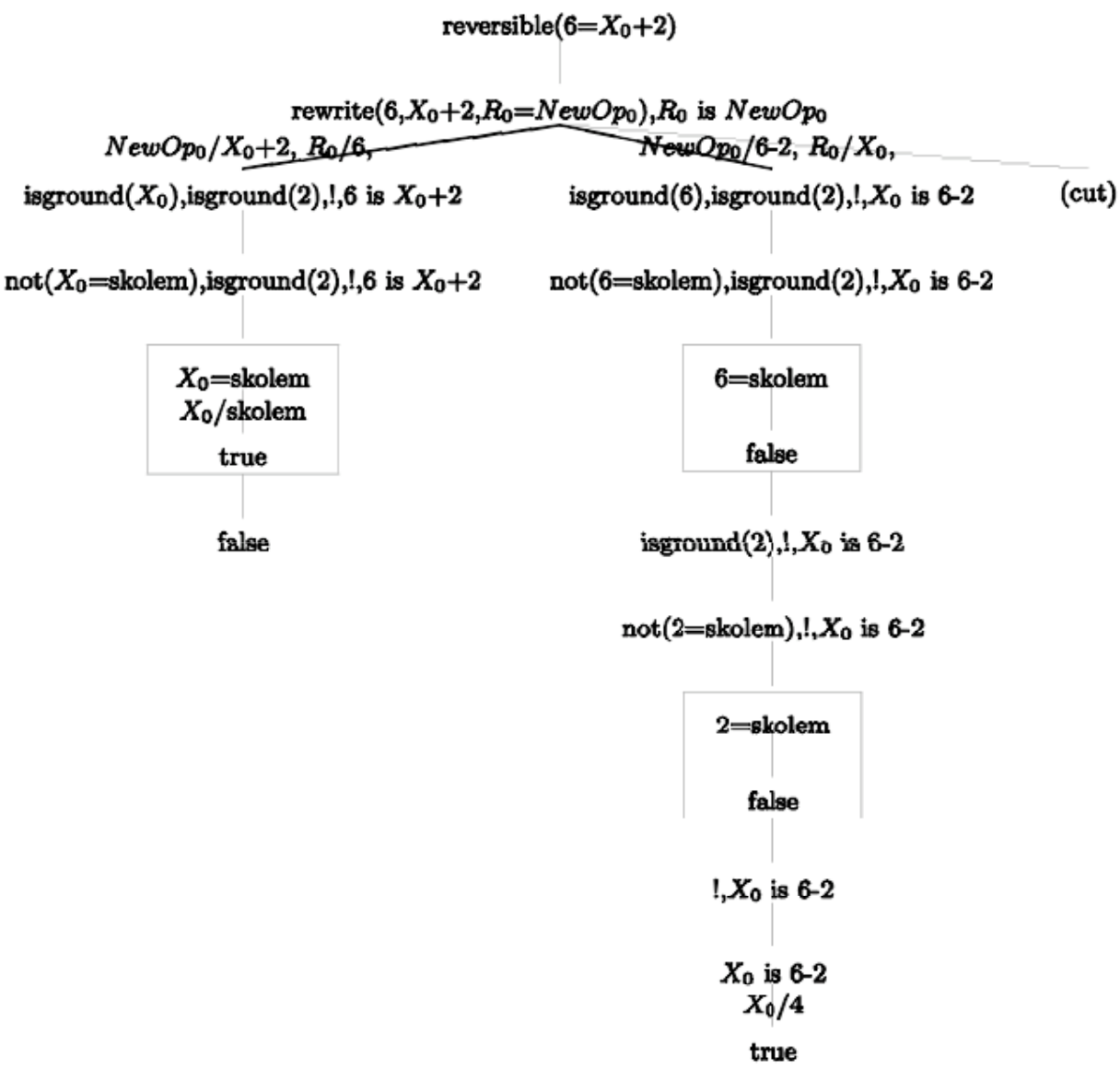
- Si consideri il seguente programma Prolog:

```
isground(X):-
        not(X=skolem).

reversible(S=Op):-
        rewrite(S,Op,R=NewOp),
        R is NewOp.

rewrite(S,A+B,S=A+B):- isground(A), isground(B), !.
rewrite(S,A+B,A=S-B):- isground(S), isground(B),!.
rewrite(S,A+B,B=S-A):- isground(S), isground(A).
```

Si rappresenti l'albero di derivazione SLD relativo al goal:

```
?- reversible(6=X+2).
```

e si dica qual'è la risposta calcolata.


reversible(6=X0+2)
rewrite(6,X0+2,R0=NewOp0),R0 is NewOp0
NewOp0/X0+2, R0/6,
NewOp0/6-2, R0/X0,
isground(X0),isground(2),!,6 is X0+2
isground(6),isground(2),!,X0 is 6-2
(cut)
not(X0=skolem),isground(2),!,6 is X0+2
not(6=skolem),isground(2),!,X0 is 6-2
X0=skolem
X0/skolem
true
6=skolem
false
false
isground(2),!,X0 is 6-2
not(2=skolem),!,X0 is 6-2
2=skolem
false
!,X0 is 6-2
X0 is 6-2
X0/4
true