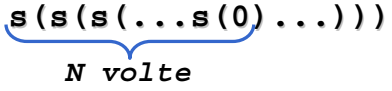
ARITMETICA E RICORSIONE

- Non esiste, in logica, alcun meccanismo per la *valutazione* di funzioni, operazione fondamentale in un linguaggio di programmazione

- I numeri interi possono essere rappresentati come termini Prolog.
  - Il numero intero N è rappresentato dal termine:




```
prodotto(X, Y, Z) "Z è il prodotto di X e Y"
  prodotto(X, 0, 0).
  prodotto(X,s(Y), Z):-  prodotto(X, Y, W),
                         somma(X, W, Z).
```

- Non utilizzabile in pratica: predicati predefiniti per la valutazione di espressioni

PREDICATI PREDEFINITI PER LA VALUTAZIONE DI ESPRESSIONI

- L'insieme degli atomi Prolog contiene tanto i numeri interi quanto i numeri floating point. I principali operatori aritmetici sono simboli funzionali (operatori) predefiniti del linguaggio. In questo modo ogni espressione può essere rappresentata come un termine Prolog.

- Per gli operatori aritmetici binari il Prolog consente tanto una notazione prefissa (funzionale), quanto la più tradizionale notazione infissa

TABELLA OPERATORI ARITMETICI

Operatori Unari	-, exp, log, ln, sin, cos, tg
Operatori Binari	+, -, *, \, div, mod

- `+(2,3)` e `2+3` sono due rappresentazioni equivalenti. Inoltre, `2+3*5` viene interpretata correttamente come `2+(3*5)`

PREDICATI PREDEFINITI PER LA VALUTAZIONE DI ESPRESSIONI

- Data un'espressione, è necessario un meccanismo per la valutazione
- Speciale predicato predefinito **`is`**.

  `T is Expr` (**`is(T,Expr)`**)
  - **`T`** può essere un atomo numerico o una variabile
  - **`Expr`** deve essere un'espressione.

- L'espressione **`Expr`** viene valutata e il risultato della valutazione viene unificato con **`T`**

Le variabili in **`Expr`** DEVONO ESSERE ISTANZIATE al momento della valutazione

ESEMPI

```
:-   X is 2+3.
yes     X=5

:-   X1 is 2+3, X2 is exp(X1), X is X1*X2.
yes     X1=5   X2=148.413    X=742.065

:-   0 is 3-3.
yes

:-   X is Y-1.
No
(NOTA: Alcuni sistemi Prolog danno come errore
       Instantion Fault)

:-   X is 2+3, X is 4+5.
no
```

Y non è istanziata al momento della valutazione

ESEMPI

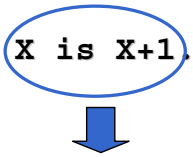
```
:- X is 2+3, X is 4+1.
yes      X=5
```

- In questo caso il secondo goal della congiunzione risulta essere:

  `:-  5 is 4+1.`

  che ha successo. `X` infatti è stata istanziata dalla valutazione del primo `is` al valore `5`.

```
:-   X is 2+3, X is X+1.
no
```



NOTA: non corrisponde a un assegnamento dei linguaggi imperativi. Le variabili sono *write-once*

ESEMPI

Nel caso dell'operatore `is` l'ordine dei goal cioè rilevante.

```
(a)   :-  X is 2+3, Y is X+1.
(b)   :-  Y is X+1, X is 2+3.
```

- Mentre il goal `(a)` ha successo e produce la coppia di istanziazioni `X=5, Y=6`, il goal `(b)` fallisce.

- Il predicato predefinito "is" è un tipico esempio di un predicato predefinito non reversibile; come conseguenza le procedure che fanno uso di tale predicato non sono (in generale) reversibili.

TERMINI ED ESPRESSIONI

- Un termine che rappresenta un'espressione viene valutato solo se è il secondo argomento del predicato **`is`**

```
p(a,2+3*5).
q(X,Y)  :-  p(a,Y), X is Y.
:-  q(X,Y).
yes   X=17   Y=2+3*5        (Y=+(2,*(3,5)))
```

Valutazione di Y

NOTA: **`Y`** non viene valutato, ma unifica con una struttura che ha + come operatore principale, e come argomenti **`2`** e una struttura che ha * come operatore principale e argomenti **`3`** e **`5`**

OPERATORI RELAZIONALI

- Il Prolog fornisce operatori relazionali per confrontare i valori di espressioni.
- Tali operatori sono utilizzabili come goal all'interno di una clausola Prolog ed hanno notazione infissa

OPERATORI RELAZIONALI

`>, <, >=, =<, ==, =/=` → ***disuguaglianza***

↓

uguaglianza

CONFRONTO TRA ESPRESSIONI

- Passi effettuati nella valutazione di:

```
Expr1 REL Expr2
```

dove **REL** e' un operatore relazionale e **Expr1** e **Expr2** sono espressioni

  - vengono valutate **Expr1** ed **Expr2**
  - NOTA: le espressioni devono essere completamente istanziate
  - I risultati della valutazione delle due espressioni vengono confrontati tramite l'operatore **REL**

CALCOLO DI FUNZIONI

- Una funzione può essere realizzata attraverso relazioni Prolog.
- Data una funzione f ad n argomenti, essa può essere realizzata mediante un predicato ad n+1 argomenti nel modo seguente
  - $f: x_1, x_2, \ldots, x_n \rightarrow y$ diventa

```
f(X1,X2, ...,Xn,Y)  :- <calcolo di Y>
```

- Esempio: calcolare la funzione fattoriale così definita:

```
fatt:  n → n !              (n intero positivo)
     fatt(0) = 1
     fatt(n) = n * fatt(n-1)     (per n>0)

fatt(0,1).
fatt(N,Y):- N>0, N1 is N-1, fatt(N1,Y1), Y is N*Y1.
```

CALCOLO DI FUNZIONI

- Esempio: calcolare il massimo comun divisore tra due interi positivi

```
mcd:  x,y → MCD(x,y)      (x,y interi positivi)
      MCD(x,0) = x
      MCD(x,y) = MCD(y, x mod y)  (per y>0)

mcd(X,Y,Z)
      "Z è il massimo comun divisore di X e Y"

mcd(X,0,X).
mcd(X,Y,Z)  :-  Y>0, X1 is X mod Y,
                  mcd(Y,X1,Z).
```


ESEMPI

- Calcolare la funzione

```
abs(x) = |x|
abs(X,Y)
      "Y è il valore assoluto di X"
abs(X,X)  :-      X >= 0.
abs(X,Y)   :-     X < 0, Y is -X.
```

- Si consideri la definizione delle seguenti relazioni:

```
pari(X)   =     true   se X è un numero pari
                false  se X è un numero dispari
dispari(X) =    true   se X è un numero dispari
                false   se X è un numero pari

pari(0).
pari(X)     :-  X > 0, X1 is X-1, dispari(X1).
dispari(X)  :-  X > 0, X1 is X-1, pari(X1).
```

RICORSIONE E ITERAZIONE

- Il Prolog non fornisce alcun costrutto sintattico per l'iterazione (quali, ad esempio, i costrutti *while* e *repeat*) e l'unico meccanismo per ottenere iterazione è la definizione ricorsiva.

- Una funzione f è definita per *ricorsione tail* se f è la funzione "più esterna" nella definizione ricorsiva o, in altri termini, se sul risultato della chiamata ricorsiva di f non vengono effettuate ulteriori operazioni

- La definizione di funzioni (predicati) per ricorsione tail può essere considerata come una definizione per *iterazione*
  - Potrebbe essere valutata in spazio costante mediante un processo di valutazione iterativo.

RICORSIONE E ITERAZIONE

- Si dice *ottimizzazione della ricorsione tail* valutare una funzione tail ricorsiva f mediante un processo iterativo ossia caricando un solo record di attivazione per f sullo stack di valutazione (esecuzione).

- In Prolog l'ottimizzazione della ricorsione tail è un po' più complicata che non nel caso dei linguaggi imperativi a causa del:
  - non determinismo
  - della presenza di punti di scelta nella definizione delle clausole.

RICORSIONE E ITERAZIONE

```
        p(X)   :-   c1(X), g(X).
(a)     p(X)   :-   c2(X), h1(X,Y), p(Y).
(b)     p(X)   :-   c3(X), h2(X,Y), p(Y).
```

- Due possibilità di valutazione ricorsiva del goal `:-p(Z).`
  - se viene scelta la clausola (a), si deve ricordare che (b) è un punto di scelta ancora aperto. Bisogna mantenere alcune informazioni contenute nel record di attivazione di `p(Z)` (i punti di scelta ancora aperti)
  - se viene scelta la clausola (b) (più in generale, l'ultima clausola della procedura), non è più necessario mantenere alcuna informazione contenuta nel record di attivazione di p(Z) e la rimozione di tale record di attivazione può essere effettuata

QUINDI...

- In Prolog l'ottimizzazione della ricorsione tail è possibile solo se la scelta nella valutazione di un predicato "p" è deterministica o, meglio, se al momento della chiamata ricorsiva (n+1)-esima di "p" non vi sono alternative aperte per la chiamata al passo n-esimo (ossia alternative che potrebbero essere considerate in fase di backtracking)

- Quasi tutti gli interpreti Prolog effettuano l'ottimizzazione della ricorsione tail ed è pertanto conveniente usare il più possibile ricorsione di tipo tail.

RICORSIONE NON TAIL

- Il predicato **`fatt`** è definito con una forma di ricorsione semplice (non tail).

- Casi in cui una relazione ricorsiva può essere trasformata in una relazione tail ricorsiva

```
fatt1(N,Y):-  fatt1(N,1,1,Y).
fatt1(N,M,ACC,ACC) :-      M > N.
fatt1(N,M,ACCin,ACCout) :- ACCtemp is ACCin*M,
                           M1 is M+1,
                           fatt1(N,M1,ACCtemp,Accout).
```

Accumulatore in ingresso

Accumulatore in uscita

RICORSIONE NON TAIL

- Il fattoriale viene calcolato utilizzando un argomento di accumulazione, inizializzato a 1, incrementato ad ogni passo e unificato in uscita nel caso base della ricorsione.

$ACC_0=1$

$ACC_1= 1 * ACC_0 = 1 * 1$

$ACC_2= 2 * ACC_1 = 2 * (1*1)$

...

$ACC_{N-1}= (N-1) *ACC_{N-2} = N-1*(N-2*(...*(2*(1* 1)) ...))$

$ACC_N = N * ACC_{N-1} = N*(N-1*(N-2*(...*(2*(1* 1)) ...)))$

RICORSIONE NON TAIL

- Altra struttura iterativa per la realizzazione del fattoriale

```
fatt2(N,Y)
       "Y è il fattoriale di N"

  fatt2(N,Y)   :-   fatt2(N,1,Y).
  fatt2(0,ACC,ACC).
  fatt2(M,ACC,Y)   :- ACC1 is M*ACC,
                      M1 is M-1,
                     fatt2(M1,ACC1,Y).
```


RICORSIONE NON TAIL

- Calcolo del numero di Fibonacci: definizione

```
fibonacci(0) = 0
fibonacci(1) = 1
fibonacci(N) =
fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)        per N >1
```

- Programma Prolog

```
fib(0,0).
fib(1,1).
fib(N,Y)   :-       N>1,
                    N1 is N-1,
                    fib(N1,Y1),
                    N2 is N-2,
                    fib(N2,Y2),
                    Y is Y1+Y2.
```