Logica, alberi SLD e SLDNF

Esercizi – lunedì 11 giugno 2007

- *Scopo:*
  1. Esercizi sulla logica dei predicati del primo ordine
  2. Esercizi su alberi di risoluzione SLD e SLDNF

1

CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

  $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

  dove A_i (i=1,..,n) e B_j (j=1,..,m) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta clausola vuota e verrà indicata con □ interpretato come contraddizione: disgiunzione falso ∨ ~vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

  $A_1 \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

2

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Passi per trasformare una qualunque fbf della logica dei predicati del primo ordine in un insieme di clausole
- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

  Esempio la formula:

  – $\forall X\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (1)

  è trasformata in:

  – $\forall X\ \forall Y\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (2)
- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

  La formula (2) diventa:

  – $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y\ (\sim q(X,Y) \vee p(Y))))$ (3)

3

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

  $\forall X \sim A$ equivale a $\sim \exists X\ A$

  $\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X\ A$

  $\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$

  $\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$

  (leggi di De Morgan).

  (3) si modifica in:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Y\ (q(X,Y) \wedge \sim p(Y))))$ (4)
- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

  in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Z\ (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))))$ (5)

4

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

  $\forall X \forall Y \exists Z (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))$ (6)

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

  $\forall X \forall Y \exists Z ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z)))$ (7)

- 7) **Skolemizzazione:** ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

  Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \exists Y\ p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X\ p(X,g(X))$

  In (7) Z è sostituita da f(X,Y), perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

  $\forall X \forall Y ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (8)

5

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire: F: $\exists X\ p(X)$ oppure F': p(f).
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.
- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.
- $((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (9)
- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene: $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))\}$ (10)
- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).
- $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W,Z))\}$ (11)

6

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

Proprietà

- Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

7

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

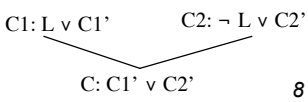
- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è molto più efficiente del metodo assiomatico-deduttivo ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.
- **Logica Proposizionale:** clausole prive di variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

  $C_1 = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $\qquad$ $C_2 = B_1 \vee \ldots \vee B_m$

- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j, ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2, (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3, denominata **risolvente**, della forma:

  $C_3 = A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee .. \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \ldots \vee B_m$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**



8

Logica dei Predicati e Linguaggio Naturale

Non sempre e' facile rappresentare frasi del linguaggio naturale in logica.

"Esiste un cane nero"

Se il dominio dell'interpretazione (universo del discorso) e' solo di cani:

$\exists X \text{ nero } (X).$

Se il dominio ha anche altri oggetti che non sono cani, devo aggiungere la proprieta` di essere cani:

$\exists X (\text{nero } (X) \wedge \text{cane}(X)).$

Errore !:

$\exists X (\text{cane}(X) \rightarrow \text{nero } (X))$ e' equivalente a $\exists X (\text{nero } (X) \vee \neg \text{cane}(X)).$

Tale formula e' vera in ogni dominio per cui c'e' un oggetto nero o c'e' un oggetto che non e' un cane.

9

Logica dei Predicati e Linguaggio Naturale (cont.)

"Tutti i corvi sono neri"

Se il dominio dell'interpretazione (universo del discorso) e' solo di corvi:

$\forall X \text{ nero } (X).$

Se il dominio ha anche altri oggetti che non sono corvi devo aggiungere la proprieta` di essere corvi:

$\forall X (\text{corvo } (X) \rightarrow \text{nero}(X)).$

Diverso significato:

$\forall X (\text{corvo}(X) \wedge \text{nero } (X))$ è equivalente a:

$\forall X (\text{nero } (X)) \wedge \forall X (\text{corvo}(X)).$

Tutti gli oggetti del dominio sono corvi e sono neri

10

Logica dei Predicati e Linguaggio Naturale (cont.)

"Tutte le scimmie sono fuggite su un albero"

Il dominio contiene differenti oggetti:
(scimmie, alberi + il predicato fuggire)

Procedimento Top-down:

$$\forall\ X\ (\text{scimmia}\ (X)\ \rightarrow\ A(X)).$$

Dove A(X) e` una formula logica non atomica che rappresenta "X e' fuggito su un albero", ovvero esiste un albero su cui X e' fuggito:

$$\exists\ Y\ (\text{albero}(Y)\ \wedge\ \text{fugge}(X,Y)).$$

Dunque:

$$\forall\ X\ \ \exists\ Y\ \ (\text{scimmia}\ (X) \rightarrow \text{fugge}(X,Y)\ \ \wedge\ \ \text{albero}(Y)).$$

Significato, alberi possibilmente diversi per scimmie diverse (l'albero dipende da X)

11

Logica dei Predicati e Linguaggio Naturale (cont.)

Altro significato:

"Tutte le scimmie sono fuggite sullo stesso albero"

In altro modo:

Esiste un albero su cui sono fuggite tutte le scimmie

Procedimento Top-down:

$$\exists\ Y\ (\text{albero}(Y)\ \wedge\ \forall\ X\ (\text{scimmia}\ (X) \rightarrow \text{fugge}(X,Y)))$$

Errore!

$$\forall\ X\ \ \exists\ Y\ (\text{scimmia}\ (X)\ \ \wedge\ \ \text{fugge}(X,Y)\ \ \wedge\ \ \text{albero}(Y)).$$

Ovvero:

$$\forall\ X\ \ \text{scimmia}\ (X)\ \ \wedge\ \ \exists\ Y\ (\text{fugge}(X,Y)\ \wedge\ \text{albero}(Y)).$$

Afferma che tutti gli oggetti sono scimmie e tutti gli oggetti sono fuggiti sull'albero.

12

Logica dei Predicati e Linguaggio Naturale (cont.)

"esiste una tarataruga che e' piu' veccchia di ogni essere umano"

$\exists X (tartaruga(X) \wedge C(X))$.

Dove C(X) e` una formula logica non atomica che rappresenta "X e' piu' vecchio di tutti gli esseri umani":

$\forall Y \ umano(Y) \rightarrow piu\text{-}vecchio(X,Y)$.

Dunque:

$\exists X (tartaruga(X) \wedge \forall Y \ umano(Y) \rightarrow piu\text{-}vecchio(X,Y))$.

Sbagliata:

$\exists X (tartaruga(X) \rightarrow \forall Y \ umano(Y) \rightarrow piu\text{-}vecchio(X,Y))$.

(Significato vero se non esistono tartarughe mentre la frase originale lo afferma)

13

Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:
- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino"*.

  $\forall H$ big(H) $\wedge$ house(H) $\rightarrow$ work(H) $\vee$ {$\exists M$ cleans(M,H) and not $\exists$ G garden(G,H)}
- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

14

Soluzione Esercizio 1

1. **Trasformazione in fbf chiuse**
2. **Elimino le implicazioni: A → B equivale a not A ∨ B**

   ∀ H not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ {∃ M cleans(M,H) ∧ not ∃ G garden(G,H)}
3. **Riduzione del connettivo not a soli atomi e non più a formule composte**

   ∀ H not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ {∃ M cleans(M,H) ∧ ∀ G not garden(G,H)}
4. **Cambiamento di nomi delle variabili (in caso di conflitti).**

15

Soluzione Esercizio 1

5. **Spostamento dei quantificatori in testa alla formula**

   ∀ H ∃ M ∀ G not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ {cleans(M,H) ∧ not garden(G,H)}
6. **Forma prenessa congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni)**

   ∀ H ∃ M ∀ G ((not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ cleans(M,H)) ∧ (not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ not garden(G,H)))
7. **Skolemizzazione**

   ∀ H ∀ G ((not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ cleans(f(H),H)) ∧ (not big(H) ∨ not house(H) ∨ work(H) ∨ not garden(G,H)))
8. **Eliminazione dei quantificatori universali**

16

Soluzione Esercizio 1

Forma a clausole:

not big(H) v not house(H) v work(H) v cleans(f(H),H)

not big(H) v not house(H) v work(H) v not garden(G,H)

La frase non può essere trasformata in clausole di Horn a causa dei letterali positivi: infatti la prima clausola contiene due letterali positivi, mentre le clausole di Horn ne contengono al più uno.

17

Esercizio 2 - risoluzione

Si assumano i seguenti fatti:

- A Simone piacciono soltanto i corsi facili;
- I corsi di scienze sono difficili;
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.

Si usi la risoluzione per rispondere alla domanda: Quale corso piace a Simone?

18

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

- A Simone piacciono soltanto i corsi facili;
  ∀X, ∀Y corso(Y,X), facile(X) → piace(simone,X)
- I corsi di scienze sono difficili;
  ∀X corso(scienze, X) → not facile(X)
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
  ∀X corso(ai, X) → facile(X)
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.
  corso(ai,bk301).

Goal G: **∃ X piace(simone,X), corso(Y,X)**

19

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Forma a clausole:

- Gneg: not piace(simone,X) ∨ not corso(Y,X)
- C1: piace(simone,X) ∨ not corso(Y,X) ∨ not facile(X)
- C2: not facile(X) ∨ not corso(scienze,X)
- C3: facile(X) ∨ not corso(ai,X)
- C4: corso(ai,bk301)

20

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Risoluzione

C5 = G e C4 : not piace(simone, bk301) X/bk301 Y/ai

C6 = C3 e C4: facile(bk301)

C7 = C1 e C5: not corso(Y, bk301) v not facile(bk301)

C8 = C6 e C7: not corso(Y,bk301)

C9 = C8 e C4: contraddizione

21

Esercizio 3 – compito del 5/11/2003

Si formalizzino le seguenti frasi in logica dei predicati:

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

Le si trasformi in clausole e si usi poi il principio di risoluzione per dimostrare che c'è uno studente di Ingegneria che non si contraddice.

22

Soluzione Esercizio 3

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.

  ∃Y (studIng(Y) and conosce(Y,boole))
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.

  ∀ X (conosce(X,boole) => haLogica(X))
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.
  ∀ X (not haLogica(X) => contraddice(X))
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.
  ∀ X (contraddice(X) => not haLogica(X))
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.
  studIng(piero) and conosce(piero,boole)

Goal: **∃Y studIng(Y) and not contraddice(Y)**

23

Soluzione Esercizio 3

Clausole:

- **C1 studIng(c)**
- **C2 conosce(c,boole)**
- **C3 not conosce(X,boole) or haLogica(X)**
- **C4 haLogica(X) or contraddice(X)**
- **C5 not contraddice(X) or not haLogica(X)**
- **C6 studIng(piero)**
- **C7 conosce(piero,boole)**

- **C8 not studIng(Y) or contraddice(Y)** (goal negato)

24

Soluzione Esercizio 3

Risoluzione:

- **C9 not haLogica(Y) or not studIng(Y)** (da C5 e C8)
- **C10 not conosce(Y,boole) or not studIng(Y)** (da C9 e C3)
- **C11 not conosce(piero,boole)** (da C10 e C6)
- **C12 Clausola vuota** (da C11 e C7)

25

Esercizio 4

Si consideri la seguente conoscenza:

Antonio, Michele e Giovanni sono iscritti al CAI (Club Alpino Italiano). Ogni appartenente al Club che non è sciatore è uno scalatore. Gli scalatori non amano la pioggia. Ogni persona che non ama la neve non è uno sciatore. Antonio non ama ciò che Michele ama. Antonio ama la pioggia e la neve.

Si rappresenti tale conoscenza come un insieme di predicati del primo ordine appropriati per un sistema di refutazione che lavori mediante risoluzione.

Si mostri come tale sistema risolverebbe la domanda: **"C'è un membro del CAI che è uno scalatore, ma non uno sciatore?"**

26

Soluzione Esercizio 4

Formule logiche:

1. ∀ X iscritto(X), not sciatore(X) → scalatore(X)
2. ∀ X scalatore (X) → not ama(X,pioggia)
3. ∀ X not ama(X,neve) → not sciatore(X)
4. ∀ X ama(michele,X) → not ama(antonio,X)
5. ama(antonio,neve)
6. ama(antonio, pioggia)
7. iscritto(antonio)
8. iscritto(michele)
9. iscritto(giovanni)

Goal: **∃ X iscritto(X), scalatore(X), not sciatore(X)**

27

Soluzione Esercizio 4

Forma a clausole:

C1. not iscritto(X) v sciatore(X) v scalatore(X)
C2. not scalatore(X) v not ama(X,pioggia)
C3. ama(X,neve) v not sciatore(X)
C4. not ama(michele,X) v not ama(antonio,X)
C5. ama(antonio,neve)
C6. ama(antonio, pioggia)
C7. iscritto(antonio)
C8. iscritto(michele)
C9. iscritto(giovanni)

Gneg: not iscritto(X) v not scalatore(X) v sciatore(X)

28

Soluzione Esercizio 4

Risoluzione

C10=Gneg - C8
not scalatore(michele) Ú sciatore(michele) {X/michele}

C11=C10 - C3
not scalatore(michele) Ú ama(michele,neve)

C12=C11-C4
not scalatore(michele) Ú not ama(antonio,neve)

C13=C12 e C5 not scalatore(michele)
C14=C13 e C1 not iscritto(michele) Ú sciatore(michele)
C15=C13 e C8 sciatore(michele)
C16=C15 e C3 ama(michele,neve)
C17=C16 e C4 not ama(antonio,neve)
C18=C17 e C5 clausola vuota

29

Esercizio 5 - SLD

Si consideri il seguente programma Prolog:

```
superclasse(X,Y):- classe(X,Y).
superclasse(X,Z):- classe(W,Z),
                   superclasse(X,W).
```

Si rappresenti l'albero SLD con regola di selezione right-most relativo al goal:

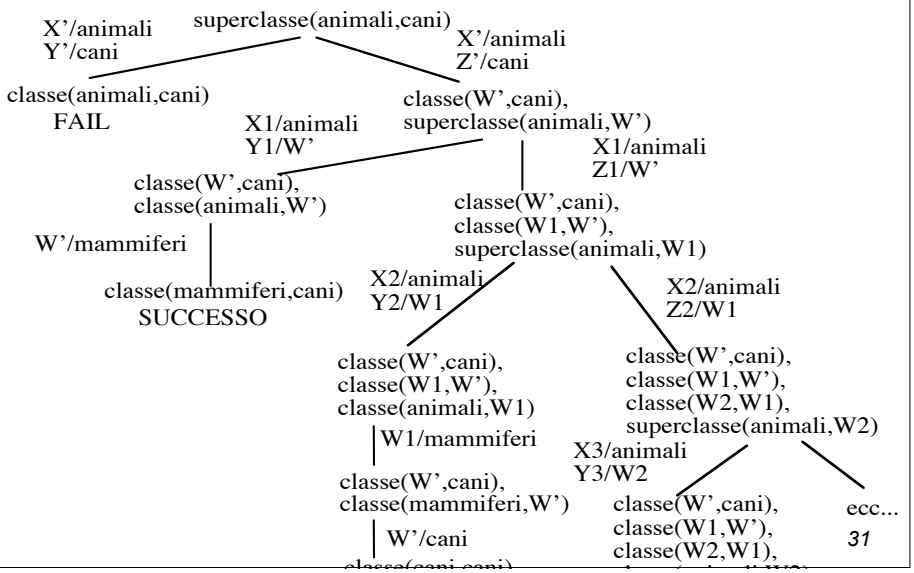
```
:- superclasse(animali, cani)
```

assumendo la presenza, all'inizio del database, dei fatti:

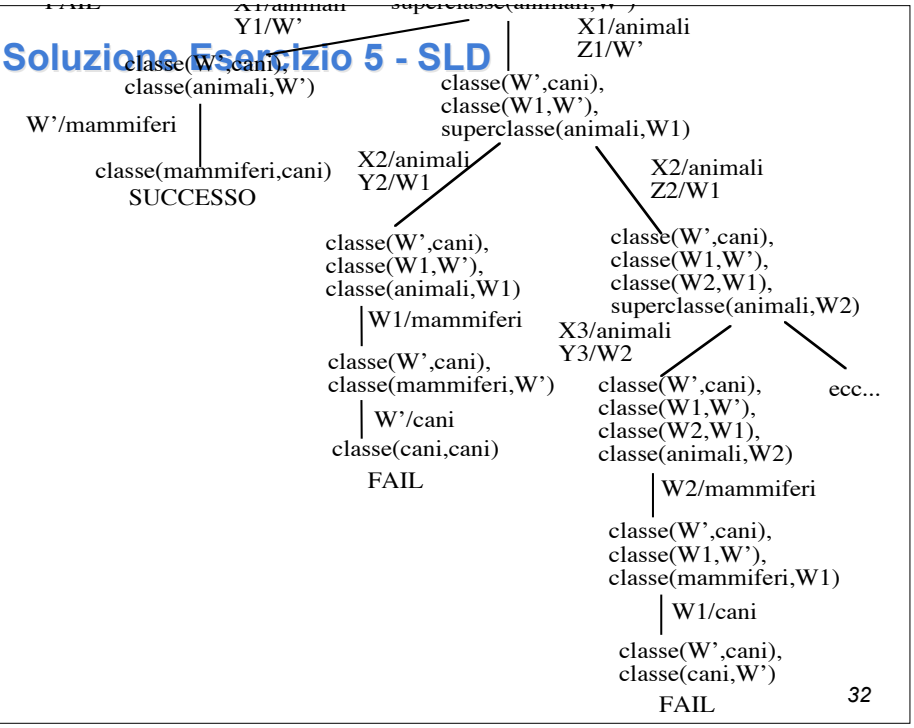
```
classe(mammiferi,cani).
classe(animali,mammiferi).
```

30

Soluzione Esercizio 5 - SLD



Soluzione Esercizio 5 - SLD



Esercizio 6 – SLD & cut

Si consideri il seguente programma Prolog:

```
intersection([],X,[]).
intersection([X|More],Y,[X|Z]):-
  member(X,Y),
  intersection(More,Y,Z).
intersection([X|More],Y,Z):-  intersection(More,Y,Z).
```

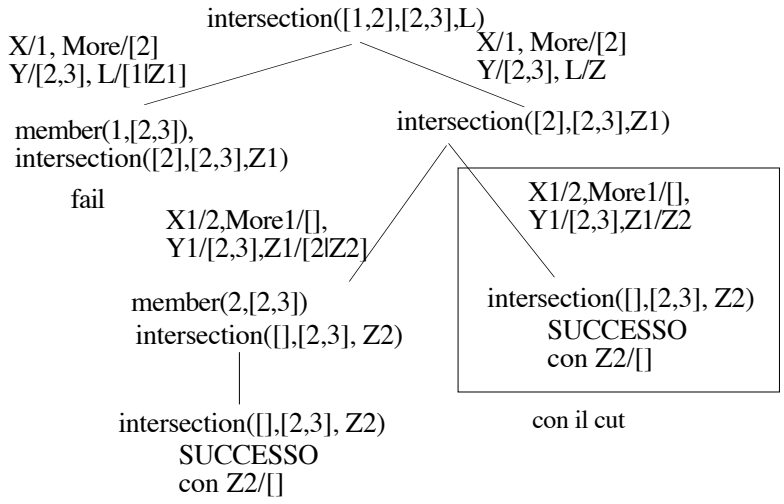
Si rappresenti l'albero SLD relativo al goal

```
:- intersection([1,2],[2,3],L).
```

e si indichino i rami di successo. Si indichi come l'utilizzo del cut (!) possa portare alla definizione corretta del predicato intersezione.

33

Soluzione Esercizio 6 – SLD & cut



34

Esercizio 7 – SLDNF

Si consideri il seguente programma Prolog:

```
diff([],_,[]):- !.
diff( [H|T], L2, [H|T3]):- not member( H, L2),!,
                            diff( T, L2, T3).
diff( [_|T], L2, T3):- diff( T, L2, T3).

member( X, [X|_]):-  !.
member( X, [_|T]):-  member(X,T).
```

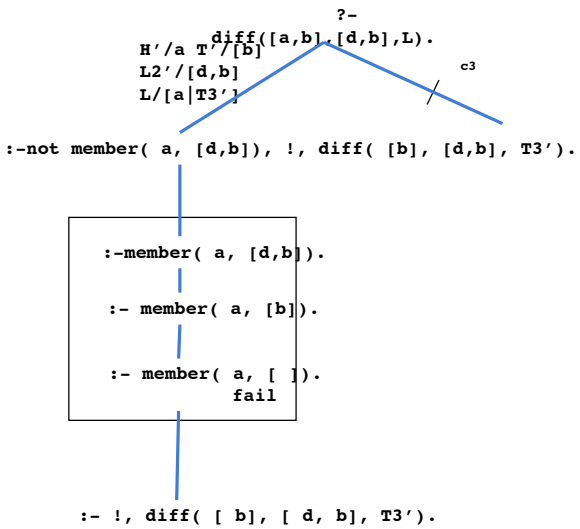
Si rappresenti l'albero SLD relativo al goal

`:- diff( [a,b], [d,b], L).`

e si indichino i rami di successo. Si indichi come l'utilizzo del cut (!) possa portare alla definizione corretta del predicato intersezione.

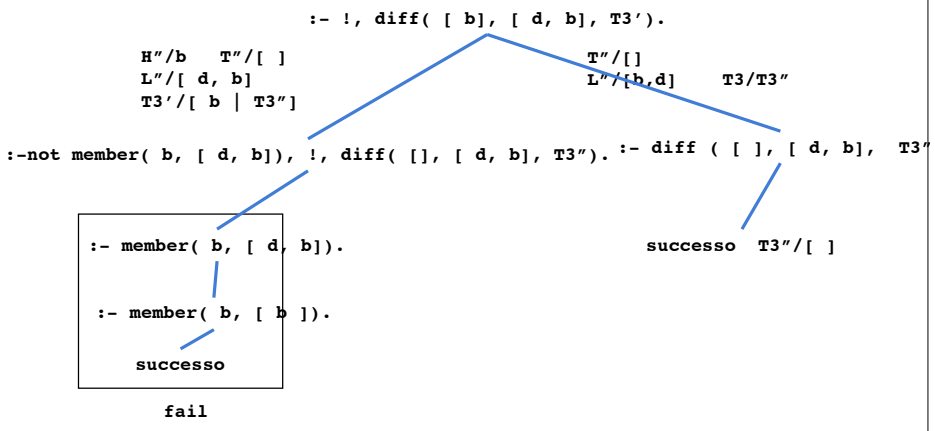
35

Soluzione Esercizio 7 – SLDNF



36

Soluzione Esercizio 7 – SLDNF



Esercizio 8 – Compito del 5 / 11 / 2003

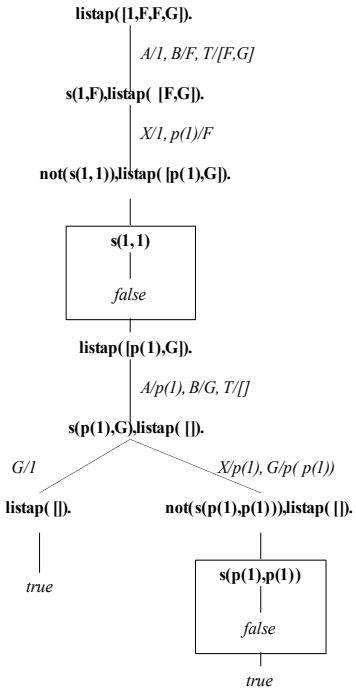
Si consideri il seguente programma Prolog:

```
listap([]).
listap([ A, B | T]):-
  s( A, B),
  listap(T).

s( p(X), X).
s( X,p(X)):-
  not(s(X,X)).
```

Si rappresenti l'albero SLDNF corrispondente al seguente goal:

```
listap([1,F,F,G]).
```

Soluzione Esercizio 8 – Compito del 5/11/2003



39

Esercizio 9 – Compito del 20 / 12 / 2004

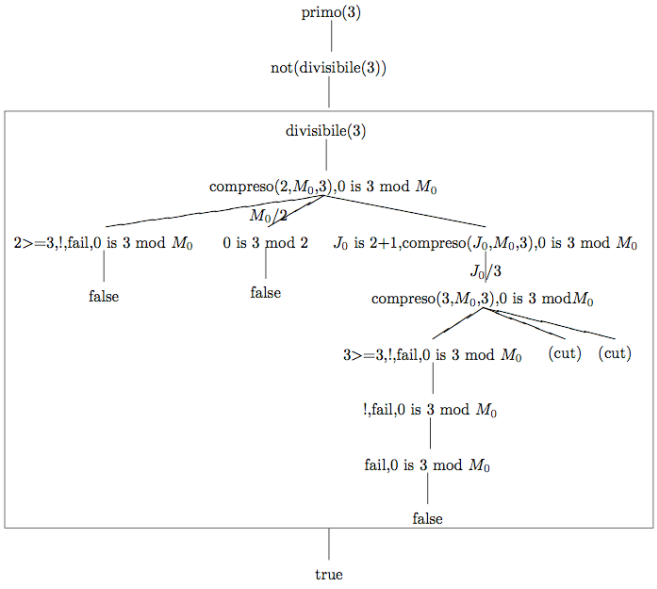
- Si consideri il seguente programma Prolog che calcola se un numero è primo (dove *mod* calcola il modulo, cioè il resto della divisione intera):

```
primo(N):- not(divisibile(N)).
divisibile(N):- compreso(2,M,N),0 is N mod M.

compreso(I,X,S):- I>=S, !, fail.
compreso(I,I,S).
compreso(I,X,S):- J is I+1, compreso(J,X,S).
```

- Si disegni l'albero SLDNF relativo al goal:

```
?- primo(3).
```

40



41

Esercizio 10 - compito del 16 dicembre 2005

- Si consideri il seguente programma Prolog:

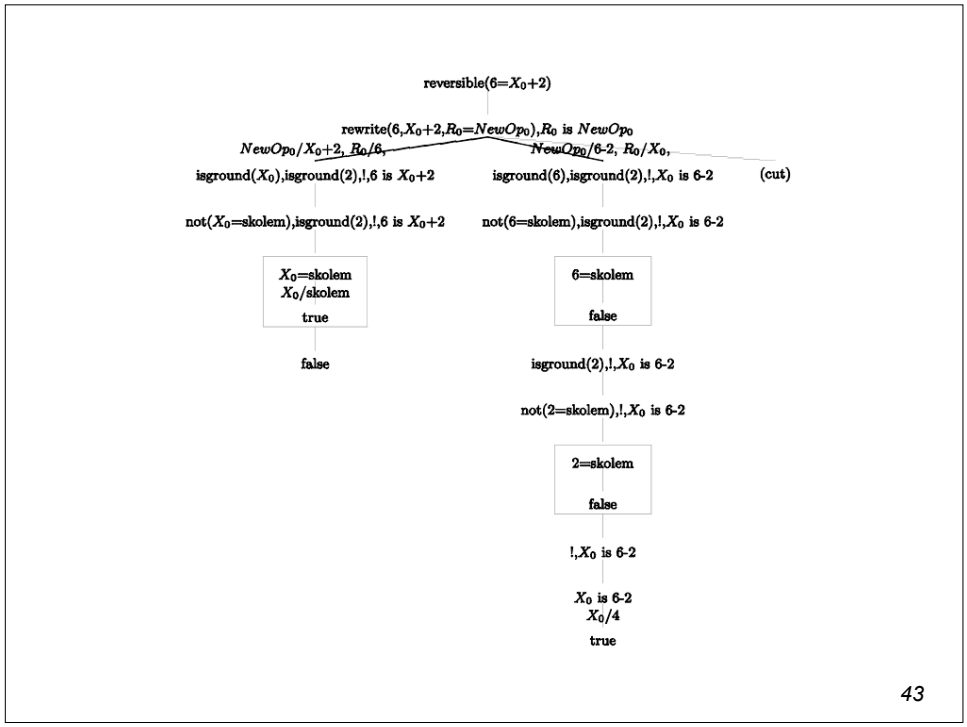
```
isground(X):-
    not(X=skolem).

reversible(S=Op):-
    rewrite(S,Op,R=NewOp),
    R is NewOp.

rewrite(S,A+B,S=A+B):- isground(A), isground(B), !.
rewrite(S,A+B,A=S-B):- isground(S), isground(B),!.
rewrite(S,A+B,B=S-A):- isground(S), isground(A).
```

Si rappresenti l'albero di derivazione SLD relativo al goal:

```
?- reversible(6=X+2).
```

e si dica qual'è la risposta calcolata.

42


reversible(6=X_0+2)
rewrite(6,X_0+2,R_0=$NewOp_0$),R_0 is $NewOp_0$
$NewOp_0$/X_0+2, R_0/6,
$NewOp_0$/6-2, R_0/X_0,
isground(X_0),isground(2),!,6 is X_0+2
isground(6),isground(2),!,X_0 is 6-2
(cut)
not(X_0=skolem),isground(2),!,6 is X_0+2
not(6=skolem),isground(2),!,X_0 is 6-2
X_0=skolem
X_0/skolem
true
6=skolem
false
false
isground(2),!,X_0 is 6-2
not(2=skolem),!,X_0 is 6-2
2=skolem
false
!,X_0 is 6-2
X_0 is 6-2
X_0/4
true

43